Агаарын нөлөөг тооцсон хэвтээ чиглэлд шидэгдсэн биеийн хөдөлгөөн хамгийн хол тусах өнцөгийн бодолт

ШУТИС, МХТС Электроникийн тэнхим
Пүрэвдоржийн Мөнхбаяр

Abstract

In this paper, the air resistance force in the projectile motion has been considered. The maximum distance of projectile can be analyzed with effects of air resistance.

1 Үндсэн хэсэг

Дунд сургуульд үзсэн хэвтээ чиглэлд шидэгдсэн биеийн хөдөлгөөн нь түүний хялбар бодолт боловч бодит туршилтийн үр дүнтэй яг таг таарахгүй. Учир нь түүнд агаарын нөлөөг тооцох шаардлагатай. Агаарын эсэргүүцэлийг доорх хэлбэртэйгээр тодорхойлж болно.

$$F_r = kv \tag{1}$$

Энд k эсэргүүцэлийн коеффициент юм. Хэвтээ чиглэлд шидэгдсэн биеийн масс $m = 1$ гэж үзлээ. Хэвтээ чиглэл дэх хөдөлгөөн

$$\frac{dv_x}{dt} = -kv_x \tag{2}$$

Дээрх (2)-г бодох нь тун амархан. Босоо чиглэл дэх хөдөлгөөн нь доорх (3) тэгшитгэлээр илэрхийлэгдэнэ.

$$\frac{dv_y}{dt} = -g - kv_y \tag{3}$$

Дээрх (2),(3)тэгшитгэлүүдийн хувьд дараах хариу

$$v_x = v_x(0)e^{-kt} \tag{4}$$

$$v_y = (v_y(0) + \frac{g}{k})e^{-kt} - \frac{g}{k} \tag{5}$$

гарна. Цаашид (5)-ыг хэдий хугацаагаар нийлбэр авбал анхны өндөртөө буцаж унах вэ гэдэг асуулт гарна. Буцаж унах хугацааг $(t = \tau)$ гэж тэмдэглээд бодолтыг хийж үзнэ. Хэрвээ $k = 0$ бол (5) нь дараах хэлбэртэй болно.

$$v_y = v_y(0) - gt \tag{6}$$

Агаарт шидэгдсэн биет анхны өндөртөө унах тэр τ агшинд (5),(6) хоёр тэгшитгэл тэнцэх болно.

$$v_y(0) - g\tau = (v_y(0) + \frac{g}{k})e^{-k\tau} - \frac{g}{k}$$

Энэ онцгой чанарыг зүгээр орхих аргагүй. $v_y(0)$-г бодож олсон маань

$$v_y(0) = \frac{g\tau}{1 - e^{-k\tau}} - \frac{g}{k} \tag{7}$$

гэж гарна. Анхны хурдыг v_0 гэж үзвэл

$$v_0^2 = v_y^2(0) + v_x^2(0) = (\frac{g\tau}{1 - e^{-k\tau}} - \frac{g}{k})^2 + v_x^2(0)$$

биелнэ. Эндээс

$$v_x(0) = \sqrt{v_0^2 - (\frac{g\tau}{1 - e^{-k\tau}} - \frac{g}{k})^2}$$

Унах хүртэлээ хэвтээ чиглэлд хэр хол нисэхийг (4)-аас

$$x = \frac{(1 - e^{-k\tau})}{k} v_x(0)$$

гэж бодож гаргалаа. Дээрх x-ыг зөвхөн τ гаас хамаарсан функц

$$x(\tau) = \frac{(1 - e^{-k\tau})}{k} \sqrt{v_0^2 - (\frac{g\tau}{1 - e^{-k\tau}} - \frac{g}{k})^2}$$

хэлбэрт бичлээ. Алслалтын зай x-ыг хамгийн их байх τ-г бодож олох асуудал маш амархан юм. $x(\tau)$ функцийн максимумыг бодож гаргах замаар бодолтыг хийнэ.

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} = e^{-k\tau} \sqrt{v_0^2 - (\frac{g\tau}{1 - e^{-k\tau}} - \frac{g}{k})^2}$$

$$- \frac{g(\frac{g\tau}{1-e^{-k\tau}} - \frac{g}{k})(1 - \frac{k\tau e^{-k\tau}}{1-e^{-k\tau}})}{k\sqrt{v_0^2 - (\frac{g\tau}{1-e^{-k\tau}} - \frac{g}{k})^2}}$$

$x(\tau)$-ээс τ-гаар авсан уламжлалыг тэгтэй тэнцүүлэн, хамгийн их утгыг бодно.

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} = 0$$

Энэ тэгшитгэлийг бодоод хариуг бичлээ.

$$v_0 = \frac{g}{k} \sqrt{(k\tau - 1)e^{k\tau} + 1} \qquad (8)$$

Тэгшитгэл(8)-ийн τ-гийн утга нь анхны хурд v_0 болон эсэргүүцэлийн коэффициент k-гаас хамаарна. Анхны өнцөг α-г бодож олохын тулд

$$v_y(0) = v_0 \sin\alpha$$

тэгшитгэлийг ашиглана. Дээрх $v_y(0)$, v_0-г тус тус (7),(8)-аас олоод оруулья.

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{(k\tau - 1)e^{k\tau} + 1}}{e^{k\tau} - 1} \qquad (9)$$

Хамгийн хол тусах өнцөг нь тэгшитгэл (9)-өөр бодогдоно. Эцэст нь хамгийн хол тусгалыг олвол

$$x(\tau) = \frac{g}{k} \sqrt{(k\tau - 1)e^{k\tau} + 1 - (\frac{k\tau}{1 - e^{-k\tau}} - 1)^2}$$

$$\cdot \frac{(1 - e^{-k\tau})}{k} \qquad (10)$$

болно. (10)-ийн утга нь τ-гаас хамааран өөрчлөгдөнө.

2 Дүгнэлт

Агаарын эсэргүүцэл байгалийн тооцох ёстой хүчний нэг боловч түүнийг тооцон бодох асуудал амаргүй байсан юм. Энэ удаа агаарын эсэргүүцэлийг хамгийн энгийн хэлбэрээр хэвтээ чиглэлд өнцөг үүсгэн шидэгдсэн бисийн хөдөлгөөнд оруулж бодлоо. Тэр дундаа хамгийн хол шидэгдэх өнцөгийн утгыг анализийн аргаар анхлан бодож үзүүлэв. Дээрх (7),(8),(9),(10) нь үр дүн болно. **Тодорхойгүй өнцгийн асуудалыг тодорхой болгосон гэж бүрэн дүгнэж болох юм.** Хэмжилтээр агаарын эсэргүүцэлийн хүч ямар хууль зүйтэй байхыг мэдэхгүй. Дараагийн удаад

$$F_r = k_0 + k_1 v + k_2 v^2 + \cdots + k_n v^n + \cdots$$

байх үед ч энэ асуудалыг бодно.

Ашигласан ном

[1] P.Munkhbayar. *The minimum time path and law* Master thesis, Department of Electrical and Electronic Engineering Graduate School of Engineering, Gifu University 2008