Агаарын нөлөөг тооцсон математик дүүжингийн өргөтгөл

ШУТИС, МХТС Электроникийн тэнхим
Пүрэвдоржийн Мөнхбаяр

Abstract

This paper conducts with the air resistance force in mathematical pendulum. The pendulum is possible to analyze the effects of air resistance, and it has been compared with the simulation results.

1 Үндсэн хэсэг

Жингүй утсанд дүүжилсэн математик дүүжингийн хувьд агаарын нөлөөг үл тооцож бодолтыг хийсэн байдаг. Дунд сургуулийн хэлбэлзэлийн тэгшитгэл нь түүнийг ойролцоолж бодсон хэлбэр боловч бодит туршилтийн үр дүнтэй яг таг таарахгүй.

Агаарын нөлөөг тооцохгүйгээр дүүжингийн туршилтын үр дүнг ярилцах аргагүй юм. Их сургуулийн физикийн лаборатори дээр дүүжингийн үеийг туршилтаар гаргаж байснаа санаж байна. Олон удаагийн туршилт хийж, статистик тооцоогоор дундаж үеийг гаргаж байлаа. Улмаар газарт унах чөлөөт хурдатгалыг тооцон гаргаж авдаг. Дээрх лабораторийн ажилд тодорхой хүрээнд магадлал өндөртэйгээр чөлөөт хурдатгал $g = 9.81$-г бодож байгаа ч, агаарын улмаас болох замхралыг орхигдуулсан байдаг. Агаар гээч зүйл v хурдтай яваа ямарч бисд түүний хөдөлгөөнийг саарyулах үйлчилгээг бий болгоно. Агаарын эсэргүүцэлийн хүчийг F_r-г дараах хуулиар илэрхийлж бичих нь тун элбэг.

$$F_r = kv^2 \tag{1}$$

Энд k эсэргүүцэлийн коэффициент болно. Математик дүүжингийн хувьд ч бас үүнийг нэмж өгөх хэрэгтэй. Дүүжингийн утас нь ачааны жинтэй харьцуулах юм бол асар бага тул тооцохгүй байхад болно. Дүүжингийн утас нь маш нарийхан байдаг нь ийм боломжийг өгнө. Утасны уртыг $l = 1$[м], хазайлтын өнцөг α ашиглан хөдөлгөөний тэгшитгэлийг бичвэл доорх хэлбэртэй илэрхийлэгдэнэ. Нэг (баруун α_m) захаас тэнцвэрийн цэг хүртэл хазайх хазайлтыг $k = 0.25$[м$^{-1}$] үед харилцан хамаарлыг бичвэл

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -9.81 \sin\alpha + 0.25\{\frac{d\alpha}{dt}\}^2 \tag{2}$$

(2) тэгшитгэлийг бодох асуудал нь нилээд төвөгтэй байдаг. Тэнцвэрийн цэгийг дайран өнгөрсний дараа нөгөө (зүүн β_m) зах хүртэл хөдөлгөөн (3) тэгшитгэлээр илэрхийлэгдэнэ.

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} = -9.81 \sin\beta - 0.25\{\frac{d\beta}{dt}\}^2 \tag{3}$$

Дээрх (2),(3)тэгшитгэлүүдийн хувьд дараах тэнцэл

$$(1 - e^{-\sin\frac{\alpha_m}{2}})\sin\frac{\alpha_m}{2} = \sin\frac{\beta_m}{2}(e^{\sin\frac{\beta_m}{2}} - 1) \tag{4}$$

биелэх болно. **Цаашид (4)-ыг хэр үнэн эсэхийг симуляцийн үр дүнд тулгуурлаж шалгана.** α_m, β_m-гийн хамааралыг симулинкийн загвар дээр бодож харуулна. Дээрх (2),(3) хувьд

$$0 \le \alpha \le \alpha_m$$

$$0 \le \beta \le \beta_m$$

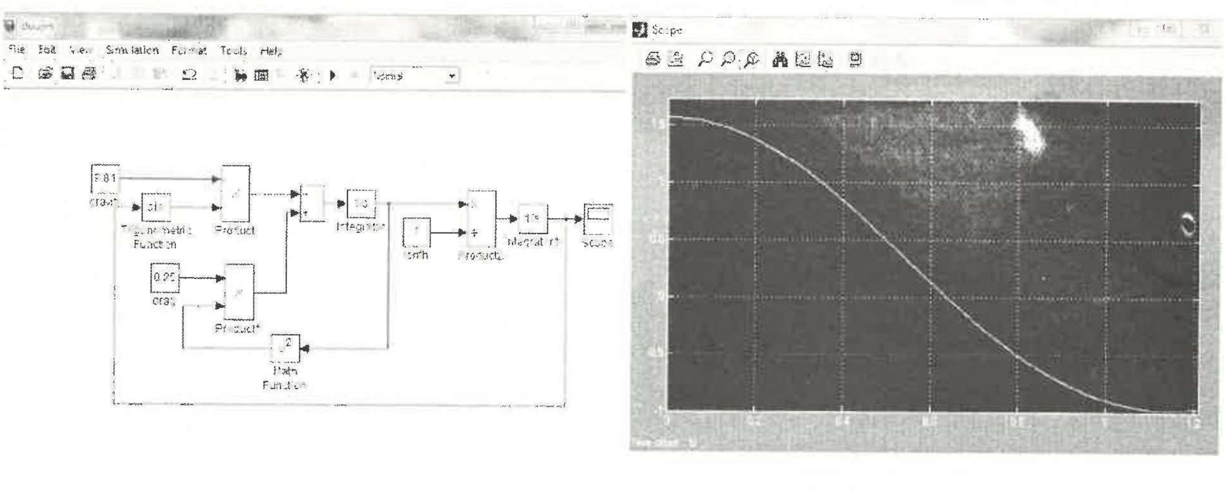
биелнэ. Мэдээж (4) бол математик бодолтын үр дүн тул алдаа байхгүй, яагаад гэвэл (2),(3) тэгшитгэлүүдийн бодолтонд ойролцоолол огт хэрэглээгүй.

2 Дүгнэлт

Model Based Development (MBD) аргаар бүх боломжийг авч үзээд дээрх тэгшитгэл (4) үнэн гэж харууллаа. Загвар дээрх симуляци болон тэгшитгэл (4)-ийн үр дүнг хүснэгт 1-д харуулав. Оролтын далайц их байх тусам харьцангуй алдаа их байгаа нь, загвар дээр β_m -ыг бодох үед интеграл авах тул түүний зөрөө нийлбэрчлэгдэн нэмэгдсээр ихсэж байгаатай холбоотой. Симулинк загвар болон скопе графикийн зураг 1-ээс харвал гол шалтгаан нь интегралын блок хоёр газарт байгаад болсон. Тоон аргаар симуляцийг хийхэд тооноосны ялгаа гардаг. Модел загварын давуу тал нь симуляци хийхэд амархан байдаг. Алдааны хэмжээг зөв үнэлэж ашиглах шаардлага байгааг энэхүү судалгаагаар харуулж чадлаа. Онолын тэгшитгэлийг бодож гаргах гэхээсээ илүү симуляци (туршилт)хийхийн ач холбогдолыг ойлгуулж өглөө. Симуляци онол хоёр хооронд тоон ялгаа байвч, харьцангуй алдаа нь тэдний зүй тогтолыг зөв ойлгох түлхүүр юм. Бодит амьдрал дээр хэрэг болох онол гарч ирэх шалгуур бол харьцангуй алдаа бөгөөд онолын зүг заагч болдог.
Математик тэгшитгэлээс олон янзын судалгааг эхлүүлэх боломжтой.

Ашигласан ном

[1] D.A.M.Martins, A.Silveira-Neto, and V.Steffen Jr. *A Pendulum-based model for fluid structure interaction analyses* Thermal Engineering, Vol. 6 December 2007 p.76-83



Зураг 1: Симулинк загвар, скопе график

Хүснэгт 1: хазайлтын зөрөө

оролт α_m	загвар β_m	онол β_m	β_m харьцангуй алдаа [%]
1.57	0.9812	1.099045	10.72
0.9812	0.7285	0.782464	6.89
0.7885	0.5822	0.614392	5.24
0.5822	0.4858	0.507403	4.26
0.4858	0.4171	0.432767	3.62
0.4171	0.3656	0.377475	3.15
0.3656	0.325	0.334837	2.94
0.325	0.2932	0.300997	2.49
0.2932	0.2672	0.273374	2.26
0.2672	0.2452	0.250425	2.09
0.2452	0.2266	0.231006	1.91
0.2266	0.2106	0.214428	1.79
0.2106	0.1967	0.200049	1.67
0.1967	0.1846	0.187467	1.53
0.1846	0.1739	0.176446	1.44