

Үерийн долгионы шилжилтийн Маскингем загварын Нэшийн хувилбарыг Хэрлэн голын савд туршсан үр дүн

Д.Оюунбаатар¹, Т.Цэнгэл²

¹Ус Цаг Уурын Хүрээлэн, ²МУИС-ийн ФЭ-ийн Факультет

Abstract

Since its development around 1934 by McCarthy(1938), the Muskingum method has been one of the most popular methods for routing flood waves in rivers. Flood routing essentially is the calculation of the modification undergone by a flood wave in moving through a reservoir or channel. The Muskingum method is used in routing a flood hydrograph through a length of channel. The relationship between the input hydrograph and output hydrograph is assumed to be linear and the storage in the reach is assumed to be proportional to the outflow from reach. The Muskingum method is a two parameters (K and x) limped linear model.

The parameters of Muskingum model are usually estimated from travel time for a flood wave through the reach. However if both inflow and outflow hydrograph records are available, better estimates for parameters through graphical method, method of Moments and the direct optimization method (O'Donnell, 1985).

Many investigators have studied the method and discussed the implications involved in its use. The more precise form of evaluation of the coefficients was derived by Nash (1959) from the differential form of the storage equation and this paper investigates the application of Nash's modification of Muskingum model for Kherlen river system. In previous studies of this method (1994) we had derived the coefficients of the model from finite difference form of the storage equation. Here the parameters of the model are estimated by graphical method and the direct optimization method. Model accuracy is estimated by Nash criteria.

Түлхүүр үгс

Үерийн долгионы шилжилт, Маскингем загварын Нэшийн хувилбар, Хуримтлалын параметр, Төгсгөлийн ялгаварын арга,

Параметр тооцох график арга, Доннелийн шууд оптимизацийн арга,
Хэрлэн голын систем

Оршил

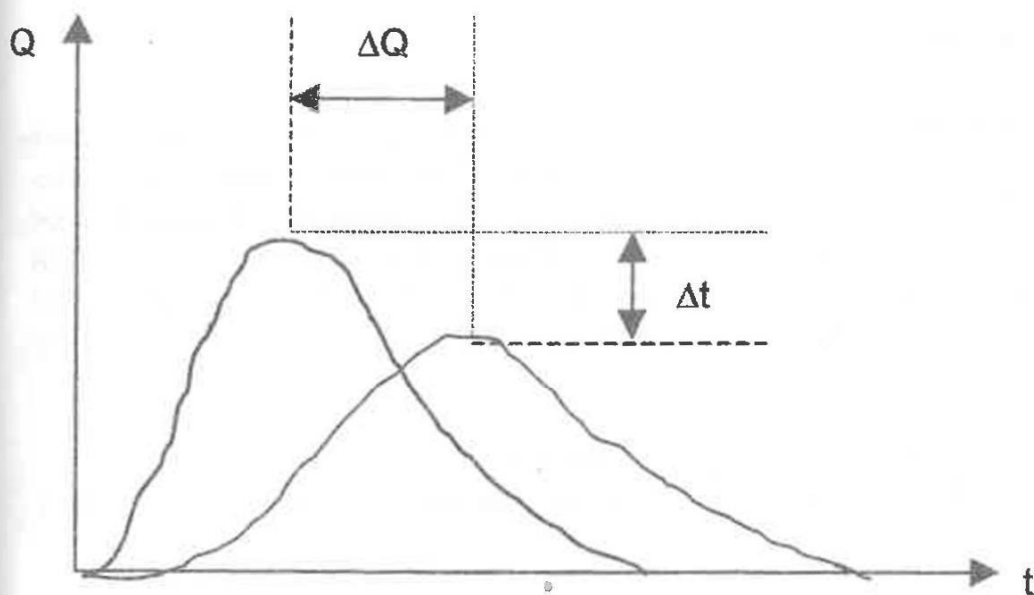
Үерийн долгионы шилжилт гэдэг нь урсгалын дагууд дээд харуулын өгөгдлөөр доод харуул дээр үерийн гидрографыг тооцохыг хэлнэ. Өөрөөр хэлбэл үерийн долгионы шилжилт хөдөлгөөн, хувьсал өөрчлөлтийг орон зай, цаг хугацаанд тодорхойлохыг хэлж байгаа юм. Гулдрилаар дамжих үерийн долгионы шилжилтийг тооцох сонгодог загваруудын нэг бол Маскингемийн загвар бөгөөд энэ загвараар Хэрлэнгийн савд урсац тооцсон үр дүнг энэ өгүүлэгт оруулсан болно.

Үерийн долгион дээд харуулаас доод харуулд шилжиж очихдоо хоёр хэлбэрээр хувьсаж өөрчлөгдөнө. Үүнд:

- үерийн гидрографын орой нь доод харуулд тодорхой хугацаанд (Δt), хоцорч очно

- үерийн гидрографын орой нь доод харуулд багасаж (ΔQ), очих ба хэлбэрийн хувьд сууриараа сунан уртсаж өөрчлөгдөнө./ 1дүгээр зураг/

Хугацааны ялгаа нь хоёр харуулын хоорондын зай болон урсах хугацаагаар тайлбарлагдах бөгөөд агуургийн хувьд багасаж байгаа гол шалтгаан нь гулдрилын адраашил болон урсах хөдөлгөөнд саад болох бусад хүчин зүйлд энерги алдаж улмаар урсгалын хурд саарсантай холбоотой байна.



1 дүгээр зураг. Үерийн долгионы шилжилт

Үерийн долгионы шилжилтийг үндсэнд нь хоёр хэсэгт хувааж үздэг /12/. Үүнд:

- Гидравлик шилжилт буюу өнгөрөлтийг орон зай, цаг хугацаанд зэрэг тооцох

- Гидролог шилжилт буюу өнгөрөлтийг зөвхөн хугацааны хамаарал хэлбэрээр тооцох зэрэг болно.

Гидравлик шилжилтийн загвар нь Сен-Венаны тэгшитгэл дээр үндэслэгдсэн бөгөөд энэ тэгшитгэл нь урсацын тасралтгүйн тэгшитгэл /масс хадгалагдах хууль/ ба моментын тэгшитгэлийн /момент хадгалагдах хууль/ хослол юм.

Гидролог загварт тасралтгүйн тэгшитгэлийг гулдрил дахь хуримтлалын тэгшитгэлтэй хослуулан үерийн долгионы шилжилтийг тооцдог.

$$I(t) - Q(t) = \frac{dS}{dt} \quad /1/$$

Үүнд: $I(t)$ - оролт буюу дээд харуулын өнгөрөлт

$Q(t)$ - гаралт буюу доод харуулын өнгөрөлт

dS/dt - дээд ба доод харуулын хоорондох гулдрилын хуримтлалын өөрчлөлт

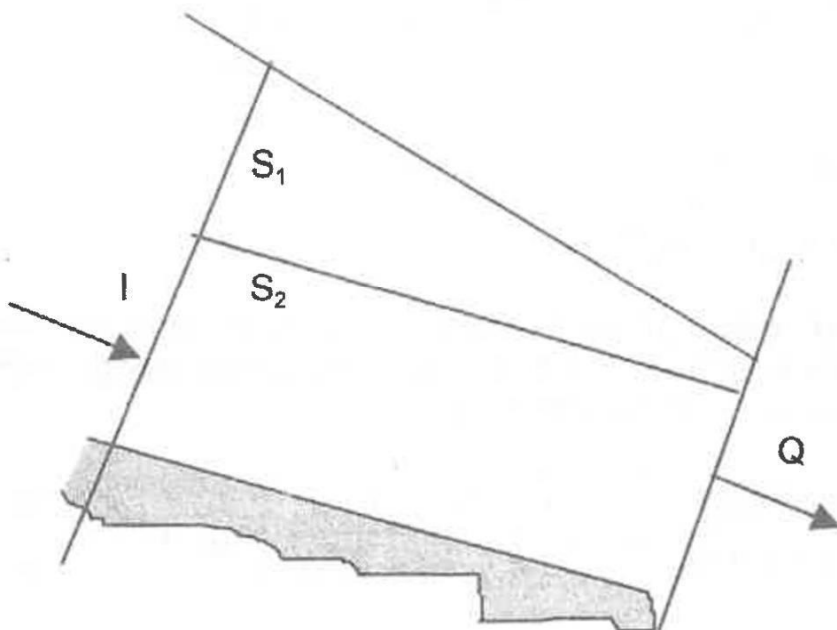
Өөрөөр хэлбэл гидролог шилжилтийн загварт усан сан болон гулдрилын тодорхой хэсгээр шилжиж буй үерийн долгионыг хуримтлал ба оролт, гаралтын шугаман хамаарлын хэлбэрээр тооцдог юм.

Арга зүй

Маскингемийн загварт үерийн үед гулдрилд бий болох хуримтлалыг призм хуримтлал буюу үндсэн гулдрил дахь хуримтлал ба үерийн долгионы хуримтлал хоёроос бүрддэг гэж үздэг /12/. Эндээс үндсэн гулдрил дахь хуримтлал нь гаралттай шууд хамааралтай, $S_2 = kQ$, харин үерийн хуримтлал нь оролт ба гаралтаас зэрэг хамаарна $S_1 = kx(I - Q)$, гэж үзсэн байна /1дүгээр зураг/. Үүнд:

K - шугаман хамаарлын итгэлцүүр

X - оролт гаралтын нөлөөллийн хувийн жинг илтгэх параметр



2 дугаар зураг. Үерийн долгионы шилжилтийн үеийн хуримтлал, S_1, S_2 - үерийн долгионы ба гулдрилийн хуримтлал

Эндээс нийт хуримтлал нь дээрх хоёр хэлбэрийн хуримтлалын нийлбэр байна.

$$S = S_1 + S_2 = kQ + kx(I - Q) = kQ + kxI - kxQ = kxI + kQ(1 - x)$$

$$S = k(xI + (1 - x)Q)$$

/2/

Энэ тэгшитгэлийг Маскингемийн загварын үндсэн тэгшитгэл буюу хуримтлалын тэгшитгэл гэнэ. Үүнийг тасралтгүйн тэгшитгэлд орлуулан гаралт дээр урсац тооцох тооцооны тэгшитгэлийг гаргаж авна.

Доод харуулд урсац тооцох тооцооны тэгшитгэлийн гаргалгаа

Тасралтгүйн тэгшитгэл ба хуримтлалын тэгшитгэлийг j ба $j+1$ гэсэн хугацаанд хэсэгчлэн төгсгөлийн ялгаврын хэлбэрээр дараах байдлаар бичиж болно.

$$\left(\frac{I_J + I_{J+1}}{2}\right)\Delta t - \left(\frac{Q_J + Q_{J+1}}{2}\right)\Delta t = \frac{S_{J+1} - S_J}{\Delta t}$$

$$S_J = k(xI_J + (1-x)Q_J)$$

$$S_{J+1} = k(xI_{J+1} + (1-x)Q_{J+1})$$

Эндээс тасралтгүйн тэгшитгэлд хуримтлалын тэгшитгэлийг орлуулж зохих хувиргалт, хялбарчлалыг хийснээр доорх хэлбэрийн тооцооны тэгшитгэлийг гаргаж авна.

$$Q_{J+1} = \left[\frac{kx + 0.5\Delta t}{k - kx + 0.5\Delta t} \right] I_J + \left[\frac{-kx + 0.5\Delta t}{k - kx + 0.5\Delta t} \right] I_{J+1} + \left[\frac{k - kx - 0.5\Delta t}{k - kx + 0.5\Delta t} \right] Q_J$$

Бичлэгийг хялбар болгох үүднээс параметруудийн бүлэглэлийг C_1 -ээр илэрхийлбэл:

$$\frac{kx + 0.5\Delta t}{k - kx + 0.5\Delta t} = C_1$$

$$\frac{-kx + 0.5\Delta t}{k - kx + 0.5\Delta t} = C_2$$

/4/

$$\frac{k - kx - 0.5\Delta t}{k - kx + 0.5\Delta t} = C_3$$

Эцэст нь Маскингемийн загвараар урсац тооцох тооцооны тэгшитгэл дараах хэлбэртэй болно.

$$Q_{J+1} = C_1 I_J + C_2 I_{J+1} + C_3 Q_J \quad /5/$$

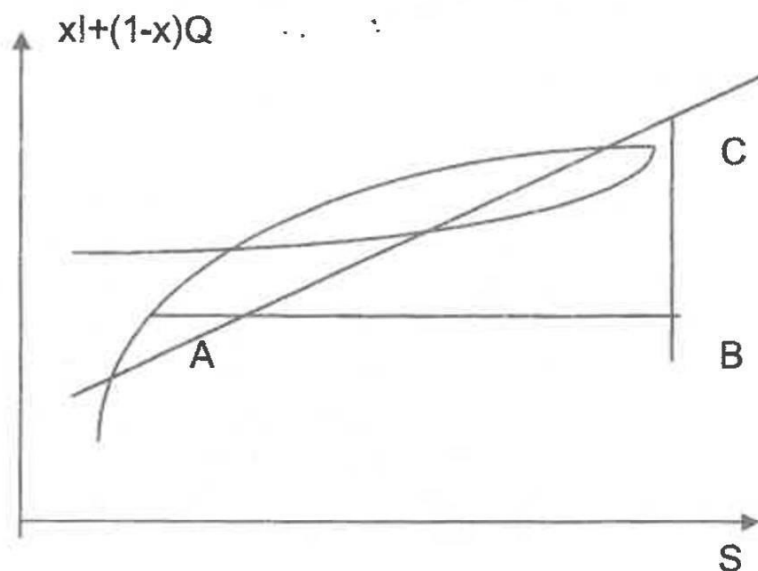
Q_{J+1}, Q_J - хугацааны гаралтууд
 I_J, I_{J+1} - оролтууд

Маскингемийн загварын параметрийг тодорхойлох аргууд нь энэ загварын хэлбэр, төрлийнх нь хувьд яаж тайлбарласнаас

шалтгаалан янз бүр байна. Жишээ нь гидравлик буюу диффузийн загвар гэж үзвэл параметрийг нь гулдриллын гидравлик ба морфометрийн үзүүлэлтүүдээс хамааруулан тодорхойлох хэрэгтэй. Хэрвээ хар хайрцаг хэлбэрийн загвар гэж үзвэл шугаман системд хэрэглэдэг стандарт аргуудыг ашиглах нь тохиромжтой байна. Энд нилээд түгээмэл, ялангуяа ажиглалт хэмжилтийн тоо, чанар дутагдалтай манай нөхцөлд тохирсон хэд хэдэн аргуудыг авч үзэж байна. Үүнд:

1.График арга

График арга нь хуримтлал ба оролт, гаралтын хамаарлын муруйнаас параметрийг тодорхойлно. Өөрөөр хэлбэл S ба $xI+(1-x)Q$ гэсэн хамаарлын гогцоот муруйнаас шулуун хэлбэрт хамгийн их ойртсон муруйг сонгох буюу тэрхүү муруйд хамаарах X -ын утгыг олно. Иймд X параметрийн бололцоот утгуудад хамаарлын муруйнуудыг байгуулна /3 дугаар зураг /.



3 дугаар зураг. Маскингемийн загварыг тодорхойлох график арга

Эндээс K параметр нь шугаман тэгшитгэлийн итгэлцүүр болох бөгөөд дараах харьцаагаар тодорхойлно.

$$k = \frac{S}{xI + (1-x)Q} = \frac{AB}{BC} \quad /6/$$

2. Донелийн шууд оптимизацийн арга

Энэ аргад K ба X параметрийг урьдчилан тодорхойлолгүйгээр тооцооны тэгшитгэлийн /5/ C_1 - коэффициентүүдийг шууд тодорхойлдог /O'Donnell, 1985/. Ажигласан ба загварчилсан гаралтуудын зөрөөг хамгийн бага квадратын аргаар багасгах замаар коэффициентүүдийг тооцно. Ингэхдээ оролт ба гаралтын функцийн цувааг матриц хэлбэрт оруулан C_1 - коэффициентүүдийн утгыг дараах тэгшитгэлээр тодорхойлно.

$$C = (P^T P) P^T Q \quad /7/$$

Үүнд: P - I_j, I_{j+1}, Q_j - ажигласан оролт ба гаралтаас бүрдсэн матриц

Q - Q_{j+1} -хоёр дахь хугацааны гаралтаас бүрдсэн матриц

C - C_1 - коэффициентүүдээс бүрдсэн матриц

Маскингемийн загварын Нэшийн хувилбар

Δt бага буюу $\Delta t / K(1-X) < 0.5$ гэсэн нөхцөл хангагдсан үед Маскингемийн загварын коэффициентүүдийг төгсгөлийн ялгаврын аргаар тооцох тохиромжтой байдаг. Өөрөөр хэлбэл харуул хоорондын зай ойр байх тохиолдолд илүү нарийвчлалтай байна гэсэн үг юм. Харин хоорондын зай ихсэж, урсах хугацаа уртсах тутам нарийвчлал нь буурна. Энэ нөхцөлийг Нэш / Nash, 1959/ судалж үзээд Δt хугацаанаас үл хамаарах тооцооны тэгшитгэлийг гаргаж авсан болно. Үүнийг Маскингемийн загварын Нэшийн хувилбар гэдэг. Энэ хувилбарт Нэш коэффициентүүдийг дараах харьцаагаар тодорхойлж болно гэж үзжээ.

$$C_1 = \left[\frac{k}{\Delta t} (1 - c^1) - c^1 \right]$$

$$C_2 = \left[1 - \frac{k}{\Delta t} (1 - c^1) \right] \quad /8/$$

$$C_3 = c^1 = \exp(\Delta t / k(1 - x))$$

Хэдийгээр энэ хувилбарыг ямар нэгэн хязгаарлалт байхгүй илүү нарийвчлалтай гэж үзэх боловч түүнийг ашигласан практикаас үзэхэд ихэнх тохиолдолд коэффициентүүд нь төгсгөлийн ялгаврын аргаар тооцсонтой их ойролцоо гарсан байдаг.

Үр дүн

Хэрлэн-Багануур-Өндөрхаан системд урсцыг Маскингемийн загвараар тооцохдоо загварын параметрийг график болон Доннелийн шууд оптимизацийн аргаар тооцсон болно.

Хэрлэн-Багануур ба Хэрлэн-Өндөрхаан харуулуудын сав газрын товч тодорхойлолт болон сонгосон гидрографын зарим үзүүлэлтүүдийг 1 дүгээр хүснэгтэд үзүүлэв.

1 дүгээр хүснэгт. Голын савын товч тодорхойлолт ба үерийн гидрографын үеүд

Гол харуул	Ус хурах талбай, км ²	1994		1995	
		үер эхэлсэн хугацаа	дууссан хугацаа	үер эхэлсэн хугацаа	дууссан хугацаа
Хэрлэн-Багануур	7350	07.01	07.22	07.11	08.04
Хэрлэн-Өндөрхаан	39400	07.01	07.22	07.11	08.04

Маскингемийн загвараар урсцыг доорх дарааллаар тооцно.

Үүнд:

1. Үерийн гидрографын сонголт

Юуны өмнө параметруудийг тодорхойлоход шаардагдах ажигласан өнгөрөлтийн цувааг (үерийн гидрографыг) дээд ба доод харуулаар сонгоно. Сонгосон үерийн гидрографын эхлэх ба дуусах хугацаан дахь өнгөрөлтийн хэмжээ нь ойролцоо байх ба оролт ба

гаралтын гидрографууд нь эзлэхүүний хувьд мөн ойролцоо байх нөхцлийг аль болохоор хангасан байх шаардлагатай.

Энэ удаа 1994 ба 1995 оны ажиглалтын материалыг судалсны эцэст дээр дурьдсан нөхцөлд арай илүү ойртсон гэж үзэж болох хоёр гидрографыг сонгон авч цаашдын тооцоогоо хийлээ.

2. Параметруудийн тодорхойлолт

Сонгож авсан ажиглалтын материалаар загварын параметрийг график ба Доннелийн шууд оптимизацийн аргуудаар тодорхойлж тооцооны тэгшитгэлийн /5/ C_1 - коэффициентүүдийг төгсгөлийн ялгаврын арга /4/ ба Нэшийн хувилбараар тус тус тодорхойлов.

3. Урсац тооцох хугацааны интервалын сонголт (Δt , цаг)

К ба Х параметруудийг тодорхойлсны дараа ямар интервалд урсцыг тооцох нь зохимжтой болохыг тооцон гаргаж 2 дугаар хүснэгтэнд үзүүллээ. Үүнд: T_r - дээд харуул буюу оролтын гидрографын өгсөх хугацаа, К ба Х- загварын параметрууд болно.

2 дугаар хүснэгт. Урсац тооцох интервалын сонголт

Шалгуурууд	1994	1994
	$k=240, x=0.1, T_r=264$	$k=198, x=0.2, T_r=216$
$\Delta t \leq 0.25T_r$	66	54
$\Delta t \leq k$	240	198
$\Delta t \geq 2kx$	48	79

Маскингемийн загварын ашиглаж хэрэглэж байсан туршлагаас үзэхэд загварын К ба Х параметруудийн утгаас хамааран ямар үед аль шалгуураар Δt сонгох нь зохимжтойг гаргаж ангилал хийсэн байдаг /10/. Жишээ нь: $X=0.5$ байх үед $\Delta t = K$ гэсэн нөхцлийг харгалзан үзэх нь зүйтэй гэсэн байна.

Сонгож авсан гидрографуудыг шинжилж үзэхэд гаралт буюу дээд харуулын /Хэрлэн-Багануур/ үерийн гидрографын өгсөх хугацаа /Т/ ойролцоогоор 9-11 өдөр болох нь ажиглагдав. Дээрх шалгуураас үзэхэд дунджаар $\Delta t=72$ цаг байх нь дээрх гурван нөхцлийг ерөнхийд нь хангаж байна гэж үзлээ.

4.Тооцооны тэгшитгэлийн коэффициентүүдийг тодорхойлсон байдал

Загварын тооцооны тэгшитгэлийн C_1 - коэффициентүүдийг төгсгөлийн ялгаврын арга ба Нэшийн хувилбараар тус тус тодорхойлж 3 дугаар хүснэгтэд үзүүлэв. Мөн энэ хүснэгтэд Доннелийн шууд оптимизацийн аргаар тооцсон коэффициентүүдийг нэгтгэв.

3 дугаар хүснэгт. Маскингемийн загварын коэффициентүүдийг тооцсон үр дүн

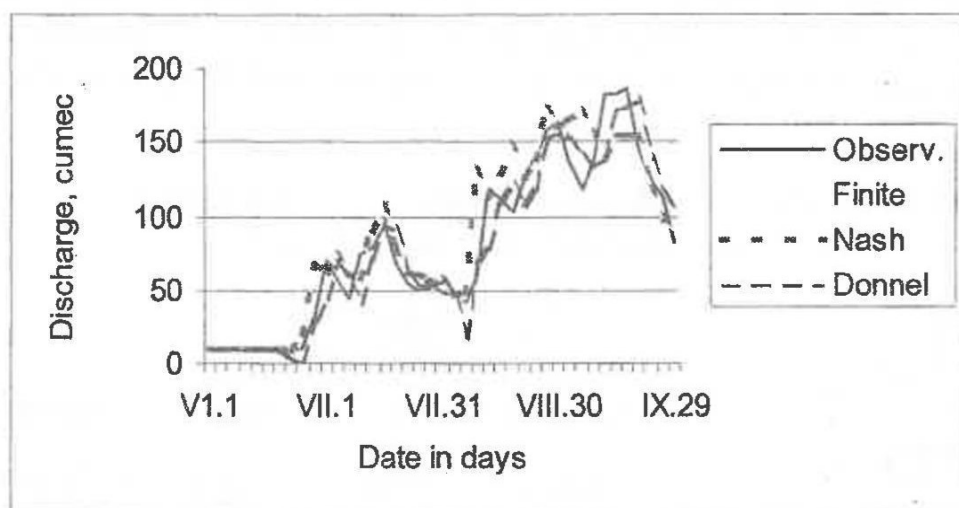
Коэффици- циент	1994			1995		
	$k=10.0, x=0.1$			$k=8.27, x=0.2$		
	Төгс. ялгавар	Нэш	Доннел	Төгс. ялгавар	Нэш	Доннел
C_1	0.238	0.23	0.1843	0.388	0.369	0.1997
C_2	0.0476	0.053	-0.0701	-0.019	-0.005	-0.1249
C_3	0.714	0.716	0.8632	0.6304	0.635	0.9023

5.Маскингемийн загвараар урсац тооцсон үр дүн

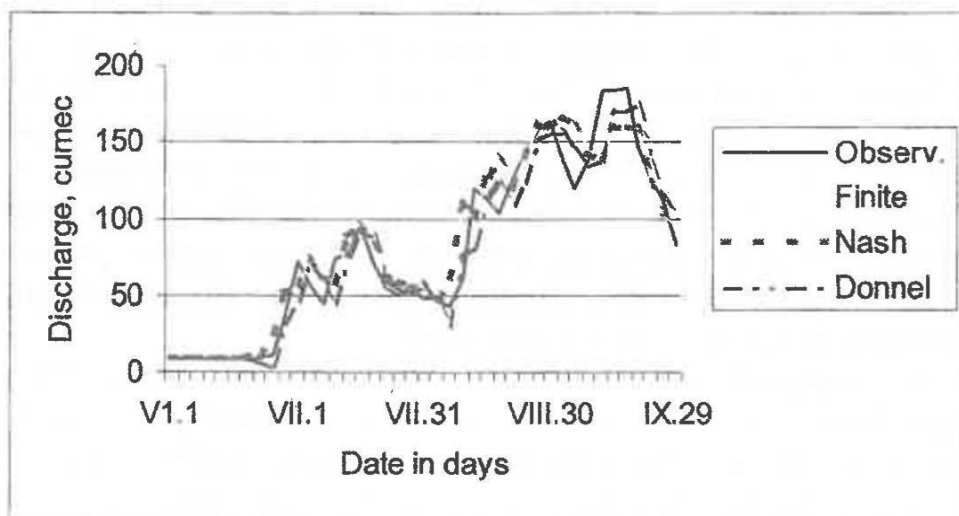
Урсах хугацаа Δt болон параметр, коэффициентүүдийг тооцсоны эцэст Хэрлэн-Багануур, Хэрлэн-Өндөрхааны өгөгдлөөр (I_j, I_{j+3}, Q_j) Хэрлэн-Өндөрхаанд (Q_{j+3}) урсацыг арга тус бүрээр загварчлав. Өөрөөр хэлбэл төгсгөлийн ялгавар, Нэшийн хувилбар, Доннелийн шууд оптимизацийн аргуудаар тооцсон параметр тус бүрт урсцыг загварчлав. Энд эхлээд параметруудийг гаргаж авсан өгөгдлөөр урсцыг тооцож (калибрацийн үе) 4 дүгээр зурагт үзүүлэв. Дараа нь уг параметруудийг бие даасан өгөгдлөөр (верификацийн үе) шалгаж үр дүнг 5 дугаар зурагт үзүүллээ.

Урсцын Маскингем загвар нь шугаман загварын хувьд урсцыг тооцох оролт ба гаралтын систем нь шугаман хамаарлын нөхцлийг хангасан байх шаардлагатай. Өөрөөр хэлбэл дээд ба доод харуулын хоорондох зай нь ойрхон байж тэдгээрийн хооронд ямар нэгэн цутгалгүй, алдагдалгүй байх нь шугаман хамаарлын нөхцөлд илүү ойртох юм. Хэрлэн-Багануур-Өндөрхаан гэсэн системийн хувьд энэ нөхцлийг хангах тал дээр учир дутагдалтай байсан нь загварын параметрийг график аргаар тодорхойлох явцад

харагдлаа. Хуримтлал ба оролт, гаралтын гогцоот муруйнуудаас шулуун буюу шугаман хэлбэрт ойртсоныг нь сонгоход хүндрэлтэй байсан ч Х-параметрийр утга 0.1 ба 0.2 байх үед харгалзах муруйнуудыг дундажласан шулууныг татаж параметруудээ тодорхойлов.



4 дүгээр зураг. Маскингемийн загвараар тооцсон урсац
/Хэрлэн-Багануур-Өндөрхаан, зүгшрүүлэх үе/



5 дугаар зураг. Маскингемийн загвараар тооцсон урсац
/Хэрлэн-Багануур-Өндөрхаан, шалгах үе/

6.Загварын нарийвчлалын үнэлгээ

Загварын нарийвчлалыг Нэшийн шалгуур болон хувиар үнэлсэн болно. Үүнд Нэшийн шалгуур нь дараах хэлбэртэй байна.

$$R^2 = 1 - \frac{F^2}{F_o^2} \quad /9/$$

$$F^2 = \sum (Q_a - Q_t)^2$$

$$F_o^2 = \sum (Q_t - Q_d)^2$$

Үүнд: Q_a - ажигласан өнгөрөлт

Q_t - загварчилсан өнгөрөлт

Q_d - ажигласан өнгөрөлтийн дундаж

6 дугаар хүснэгт. Маскингемийн загварын нарийвчлалын үнэлгээ, Хэрлэн-Багануур-Өндөрхаан

Үзүүлэлт	Калибрацийн үе, параметр-1994 өгөгдөл-1994		Верификацийн үе, параметр-1994 өгөгдөл-1995	
	Нэш	Доннел	Нэш	Доннел
R^2	0.8877	0.9139	0.854	0.908
R	0.9422	0.956	0.926	0.953
Хувь	18.9	15.0	19.1	17.3

Нэшийн шалгуур нь ерөнхийдөө хамаарлын итгэлцүүртэй утга ижил бөгөөд загварын нарийвчлалыг Нэшийн хувилбар ба Доннелийн аргаар тооцсон гаралтууд дээр шалгав. Төгсгөлийн ялгаврын аргын хувьд үр дүн Нэшийн хувилбартай ялгаагүй шахам гарсан тул арай илүү үр дүн өгсөн Нэшийн хувилбарыг сонгож Доннелийн аргатай харьцуулав /4,5 дугаар зураг/.

Дүгнэлт

1.Харуул хоорондын зай ихсэх тутам Х-ын утга багасах буюу дээд харуулын нөлөө багасаж харин доод харуулын хувийн жин

нэмэгддэг болох нь загварын ерөнхий тэгшитгэлээс харж болно /3 дугаар хүснэгт/. Оролтын хувийн жин 10-30 хувь байхад загварчлах өдрийн гаралт нь өмнөх өдрийн гаралтаас 60-90 хувиар хамаарна.

2. Нэшийн хувилбараар тооцсон үр дүн нь төгсгөлийн ялгаврын аргаас 1-2 хувиар илүү нарийвчлалтайгаар урсцыг тооцох боломжтой байна.

3. Доннелийн шууд оптимизацийн аргаар тооцсон үр дүн нь нөгөө хоёр аргаасаа илүү нарийвчлалтай боллоо. Иймд Хэрлэн-Багануур-Өндөрхаан системд урсцыг загварчлахдаа Доннелийн аргаар тооцсон параметруудийг сонгох нь илүү үр дүнтэй болно гэж үзлээ.

4. Төгсгөлийн ялгавар, Нэшийн хувилбар, Доннелийн аргуудаар параметрийг нь тооцсон Маскингемийн загвар Хэрлэн-Багануур-Өндөрхаан гэсэн системийн гаралтын гидрографыг ерөнхийд нь дүрсэлж, явцыг нь дагаж чадаж байгаа нь загварчлалын үр дүнгээс харагдаж байгаа /4 ба 5 дугаар зураг/ бөгөөд нарийвчлалыг нь Нэшийн шалгуураар үнэлэхэд ажигласан ба загварчилсан урсцын хамаарлын коэффициент 0.92-0.94 байгаа нь харьцангуй өндөр үзүүлэлт бөгөөд урсцыг дунджаар 15-20 хувийн алдаатай тооцож байна /6 дугаар хүснэгт/. Энэ нь богино хугацааны прогнозын таарц нь 80 орчим хувь болж байна.

5. Маскингемийн загвар нь богино хугацааны прогноз өгөхөд хэлбэрийн хувьд учир дутагдалтай боловч урсцын гидрографыг дүрслэх, тасарсан үеийн ажиглалт хэмжилтийг нөхөхөд хангалттай үр дүн өгөх юм. Мөн түүнчлэн энэ загварын оролт нь зөвхөн дээд ба доод харуулд ажиглагдсан өнгөрөлт байх тул ууршилт, хөрсний чийг зэрэг урсцын бусад хүчин зүйлийн ажиглалт хэмжилт хомсдолтой манай нөхцөлд илүү тохиромжтой зэргээрээ давуу талтай болно.

Ашигласан ном хэвлэл

1. Ш.Цэгмид, Монгол орны физик газар зүй, Улаанбаатар, 1957

2. В.А.Шелутко., Численные методы в гидрологии, Гидрометеоиздат, Ленинград, 1983

3. Монгол орны гадаргын усны лавлах /Г.Даваа, Б.Мягмаржав/, шинэчилсэн 2 дахь хэвлэл, Улаанбаатар, 1998

4. Л.С.Кучмент., Модели процессов формирования речного стока, Гидрометеоиздат, Ленинград, 1975

5. Ю.М.Георгиевский., Краткосрочные гидрологические прогнозы, Издат ЛПИ, Ленинград, 1982

6. П.М.Мелентьев., Приближенные вычисления, Москва, 1962

7.А.И.Чеботарев., Общая гидрология, Гидрометеоиздат, Ленинград, 1975

8.Ч.Кайсл.,Анализ временных рядов гидрологических данных, Гидрометеоиздат, Ленинград, 1972

9. Vijai P.Singh., Hydrologic system, Rainfall-Runoff Modelling, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1988

10. Australian rainfall and runoff, Guide to flood estimation, Vol.1, The Institution of Engineers, Australia, Revised edition, 1987, Reprinted 1991

11. Ven Te Chow, David R.Maidment, Larry W.Mays., Applied Hydrology, McGRAW-HILL International, 1988

12. Applied Hydrology-I, Hydrologic System (by Kieran M.O'Connor) , Textbook of the International Course on Hydology, Galway, Ireland,1997