Исследование бифуркаций периодических режимов при ламинарно-турбулентном переходе

Т.Г. Дармаев[*]

Бурятский государственный университет, Улан-Удэ

В данной работе метод инвариантной конечномерной проекции уравнений Навье-Стокса применяется для исследования плоскопараллельного течении вязкой несжимаемой жидкости над плоской полубесконечной пластиной. При этом, нелинейная начально-краевая задача для периодических возмущений основного течения сводится к конечномерной рекуррентной системе линейных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Предложенный универсальный алгоритм позволяет численно находить амплитудные поверхности устойчивых и неустойчивых режимов и точки тангенциальных бифуркаций периодических режимов для произвольных частот и чисел Рейнольдса.

ВВЕДЕНИЕ

Исследованию развития гидродинамических возмущений посвящено множество работ, проведено множество экспериментов, существует довольно много различных подходов, но до сих пор механизм перехода от ламинарного течения к турбулентному полностью не исследован и вызывает интерес множества исследователей. Линейная теория гидродинамической устойчивости достаточно хорошо развита, и сводится к задаче на собственные значения для линеаризованных относительно малых возмущений уравнений Навье-Стокса. Для плоскопараллельных течений – это хорошо известная задача Орра-Зоммерфельда [1]. Исследованию задачи Орра-Зоммерфельда посвящено множество работ [2]. Главными целями численного решения при заданном основном течении являются: поиск кривой нейтральной устойчивости (c_i=0), кривой постоянной скорости роста (αc_i=const), вычисление собственных значений и функций для данной пары положительных значений α и *R*.

Первая попытка оценить влияние нелинейности на судьбу возмущений была предпринята Ландау Л.Д. [3]. С помощью качественных рассуждений он показал, что нелинейность может как стабилизировать нарастающие возмущения, создавая новый устойчивый режим течения, так и вызвать рост возмущений, устойчивых в линейном приближении. Существенный вклад в развитие нелинейной теории был сделан Струминским В.В. [4]. Он получил решение уравнений Навье-Стокса для нелинейных возмущений в виде сходящихся рядов. Просуммировал бесконечные ряды для амплитуд возмущений и показал, что нарастающие возмущения стабилизируются, а затухающие в линейном приближении затухают и при нелинейном рассмотрении. Решения Струминского сходились на некотором расстоянии от линейной нейтральной кривой. Окрестность нейтральной кривой требовала особого рассмотрения. Впервые это сделали Стюарт и Ватсон [5,6]. Они получили нелинейные решения в виде асимптотических рядов. Численные расчёты для течения Пуазейля выполнили Рейнольдс и Поттер [7].

В данной работе метод инвариантной конечномерной проекции уравнений Навье-Стокса разработанный Б.Ю.Скобелевым [8] применяется для плоскопараллельного течения вязкой несжимаемой жидкости над плоской полубесконечной пластиной. При этом начально-краевая задача для возмущений основного течения сводится к конечномерной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, правые части которых находятся из рекуррентной системы линейных краевых задач [9]. Существенным достоинством метода инвариантной проекции является то, что он гарантирует правильное описание асимптотического поведения решений (т.е. при $t \to \infty$) и учитывает дискретный и непрерывные спектры возмущений. Полученные расчеты

[*] Electronic address: dtg@bsu.ru

показывают, что в пограничном слое существует тангенциальная бифуркация периодических режимов.

МЕТОД ИНВАРИАНТНОЙ КОНЕЧНОМЕРНОЙ ПРОЕКЦИИ

Из уравнений Навье-Стокса получаем уравнение для возмущений:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u\nabla)u + Lu = 0,$$

$$div\, u = 0 \qquad (1)$$

$$Lu = (v_0\nabla) + (u\nabla)v_0 - \nabla p - \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta u,$$

где u, v_0 – возмущенное и невозмущенное решения, p – давление, Re – число Рейнольдса. Система координат выбрана так, чтобы ось x была направлена вдоль пластины, z-координата – поперек пластины, y-координата направлена перпендикулярно пластине, начало координат совпадает с передней кромкой пластины. В работе рассматриваются трехмерные моногармонические возмущения, периодические по продольной координате x с волновым числом α и по поперечной координате z с волновым числом β:

$$u_j^{km} = \hat{u}_j^{km}(y)e^{i\theta_{km}},\ j = 1,2,3; -\infty < k, m < \infty,\ \theta_{km} = k\alpha x + m\beta z.$$

В соответствии с методом инвариантной конечномерной проекции [8] уравнений Навье-Стокса (1) решение для возмущений ищется в виде: $u = u_{2n} + u_{\perp}$, u_{2n} – линейная функция m собственных функций оператора L, а ортогональное дополнение $u_\perp$ ищется в виде функции от u_{2n} : $u_\perp = g(u_{2n})$, Условие того, что решение принадлежит инвариантному многообразию уравнений Навье-Стокса, однозначно определяет вид функции $g(u_{2n})$.

Уравнение неразрывности системы (1) удовлетворяется введением функций тока:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi^{km}}{\partial y} = k\alpha u_1^{km} + m\beta u_3^{km} + \delta_{\lambda 0}(u_1^{00} + Cu_3^{00}) \\ (1-\delta_{\lambda 0})\dfrac{\partial \psi^{km}}{\partial \theta} = -u_2^{km} \end{cases}$$

где δ - символ Кронекера, C – произвольная постоянная.

Из уравнения неразрывности и уравнений Навье-Стокса для завихренности $\bar{\omega}$ в [9] выводится система эволюционных уравнений для векторов $\bar{x}^{km} = (\bar{\Delta}\bar{\psi}^{km}, \bar{\omega}_2^{km}, \delta_{\lambda 0}u_3^{00})$:

$$\frac{dx}{dt} = -L_v x + N(x),$$

где $x = \bar{x}^{km}(y)e^{i\theta_{km}}, -\infty < k, m < \infty$

В соответствии с теорией [8] динамическая система:

$$\frac{d\rho_k}{dt} = (\sigma_r^{(k)} + b^{(k)})\rho_k, \quad \frac{d\theta_k}{dt} = (\sigma_i^{(k)} + c^{(k)})\rho_k, \quad k = 1,2,...,n,$$

определяет поведение траекторий на $2k$-мерном инвариантном многообразии, где $\sigma^{(k)} = \sigma_r^{(k)} + i\sigma_i^{(k)}$ - собственные значения оператора $(-L_v)$, а $b^{(k)}, c^{(k)}$ - некоторые функции, зависящие от полярных координат ρ_k, θ_k . В случае двумерной инвариантной проекции предельное многообразие определяется функциями:

$$g^* = \sum_{|S|=2}^{\infty} g_S \rho^S, \quad b(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}\rho^{2n},$$

$$c(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n}\rho^{2n}, \quad g_S = \sum_{k=-s}^{s} g_{sk}e^{ik\theta^*}, \quad \theta^* = \theta - \alpha x,$$

где g_{sk} удовлетворяют следующей рекуррентной системе уравнений:

$$ik\alpha\left[(\sigma_r - U)\Delta_k + D^2U\right]g_{sk} - \frac{1}{R}(\Delta_k)^2 g_{sk} = -\delta_{k1}(b_{s-1} + ic_{s-1})\Delta_1 f - \delta_{k,-1} *$$
$$*(b_{s-1} - ic_{s-1})\Delta_1 \bar{f} - ik\sum_{q+p=s} c_q\Delta_k g_{pk} - i\alpha\sum_{q+p=s}\sum_{l+j=k}\left[lg_{ql}D\Delta_j g_{pj} - jDg_{ql}\Delta_l g_{pj}\right],$$
(2)

где $\tilde{\alpha}^2 = \alpha^2 + \beta^2, D = \frac{d}{dy}, \quad \Delta_k = D^2 - (k\tilde{\alpha})^2$, $U(y)$ – профиль невозмущенного ламинарного потока, $\bar{f}$ – сопряженная собственная функция задачи Орра-Зоммерфельда.

Коэффициенты b_{s-1}, c_{s-1} для 2π-периодических функций от θ определялись из условий ортогональности и нормировки. Амплитуда периодических режимов определялась из уравнения:

$$\gamma + \sum_{n=1}^{N} b_{2n} \mathrm{A}^{2n} = 0, \quad N \to \infty. \qquad (3)$$

где $\gamma = \alpha\sigma_i$, – линейный коэффициент нарастания.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

В работе проводился численный расчет приближенных уравнений для амплитуд периодических режимов:

$$\gamma + \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} \mathrm{A}^{2n} = 0.$$

при N =2,3,4,5, где $\gamma = \alpha\sigma_i$ - линейный коэффициент нарастания.

При численном интегрировании системы (1) граничные условия на бесконечности заменялись граничными условиями на интервале (0,L), L>>1. Затем преобразованием $y = L\bar{y},\ 0 \le y \le L,\ 0 \le \bar{y} \le 1$, задача сводится к интегрированию на интервале (0,1). Вычисление присутствующих в правой части собственных функций задачи Орра-Зоммерфельда, а также решение системы (1) проводилось методом ортогональной прогонки [10] на неравномерной разностной сетке.

В результате вычислений выявилась следующая картина (рис.2-3). При малых значениях волнового числа α, соответствующих нижней ветви линейной нейтральной кривой, от течения Блазиуса ответвляется устойчивый периодический режим. При некотором $\alpha=\alpha_2$ передняя складка амплитудной поверхности из нефизической области отрицательных значений квадратов амплитуд выходит в область положительных значений и происходит смена закритической бифуркации докритической ($\alpha=\alpha_3$). С увеличением числа Рейнольдса амплитуда этого режима нарастает, затем уменьшается и далее этот режим исчезает в результате слияния с неустойчивым режимом, ответвляющимся от верхней ветви линейной нейтральной кривой. Точки слияния этих режимов называются точками тангенциальной бифуркации [11], соответствующие точкам складки в теории катастроф [12]. Далее с увеличением α амплитудная поверхность периодических решений отрывается от линейной нейтральной кривой ($\alpha=\alpha_4$), и при некотором значении α периодические решения исчезают.

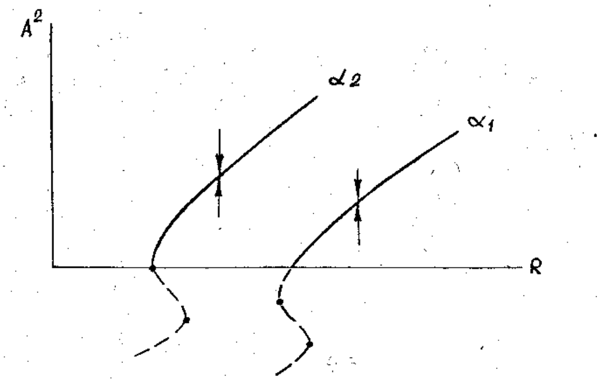

Рис.2

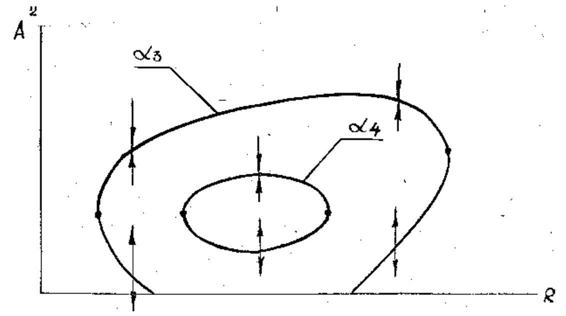

Рис.3

На рис.4 приведен срез амплитудной поверхности при α=0.206906, из которого видно, что при определенных начальных амплитудах периодические возмущения могут перейти либо в устойчивый периодический режим, либо в неустойчивый. На рис.5 приведены линейная нейтральная кривая (сплошная линия) и точки складок, или, что то же самое, точки тангенциальной бифуркации трехмерных режимов. Внутри нейтральной кривой возмущения нарастают, а вне - затухают.

В настоящее время экспериментально обнаружены три типа перехода. Первый был обнаружен в классической работе Клебанова и др. [13]. Он характеризуется быстрым нарастанием возмущений, высокочастотными всплесками и последующим образованием турбулентных пятен. Другой тип перехода был обнаружен в экспериментах Качанова, Козлова, Левченко [14]. Он характерен нарастанием высших гармоник двумерной волны Толлмина-Шлихтинга с последующим ростом трехмерной субгармоники. В экспериментах Козлова, Левченко, Сарика [15] наблюдался третий тип перехода - промежуточный между первыми двумя типами.

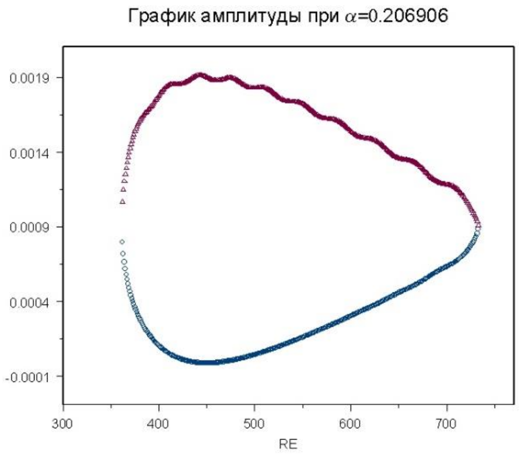

Рис.4

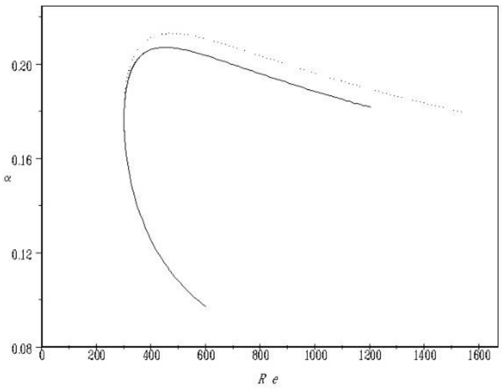

Рис.5

Для объяснения этих явлений в настоящее время существуют две основные теоретические модели. Первая была разработана Крейком [7] и по сути является обобщением метода Стюарта-Ватсона на случай взаимодействия трех резонансных волн. Другая модель - модель вторичной неустойчивости [6] исследует устойчивость двумерных нелинейных волн относительно трехмерных линейных возмущений. Полученные с помощью этих моделей области быстрого роста трехмерных возмущений достаточно хорошо совпадают с экспериментальными результатами по наблюдению первых стохастических пульсаций. Но эти работы не объясняют причину появления стохастичности.

Как известно, в экспериментах по генерации ламинарно-турбулентного перехода с помощью вибрирующей ленточки клебановский тип перехода наблюдается только при относительно больших начальных амплитудах возмущения и характеризуется резким ростом возмущений. Таким образом клебановский тип перехода можно связать с передней верхней частью амплитудной поверхности, причем амплитуда соответствующего возмущения должна быть не меньше амплитуды периодического решения в передней точке тангенциальной бифуркации.

Если начальная амплитуда меньше критической клебановской, то возможен другой тип перехода, который можно соотнести с промежуточным типом, наблюдавшимся в эксперименте. Этот тип перехода связан с тем, что в результате нарастания возмущения становятся трехмерными и внутри нелинейной нейтральной поверхности для плоских возмущений их амплитуда может стать равной амплитуде точки тангенциальной бифуркации для трехмерных возмущений ($\beta \neq 0$).

И, наконец, при субгармоническом типе перехода в эксперименте наблюдается рост высших гармоник начальной двумерной волны Толлмина-Шлихтинга. Причем начальные амплитуды возмущений, вызывающих этот тип перехода, достаточно малы, и начальные возмущения действительно являются двумерными. Поэтому естественно связать субгармонический тип перехода с задней точкой тангенциальной бифуркацией в окрестности верхней ветви линейной нейтральной кривой.

Таким образом, каждому типу перехода соответствует точка тангенциальной бифуркации периодических режимов (трехмерные или двумерные). Из теории динамических систем [16] следует, что в окрестности точки тангенциальной бифуркации возникает явление перемежаемости (т.е. чередование во времени ламинарного и турбулентного режимов). Причем длительность турбулентных режимов зависит от "расстояния" до точки тангенциальной бифуркации. Наблюдающаяся в экспериментах картина дает качественное подтверждение высказанным на основе проведенных расчетов предположениям.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Линь Цзяо-цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М.: Изд-во иностр.лит., 1958.
[2] Дразин Ф. Введение в теорию гидродинамической устойчивости: Пер. с англ. М.:ФИЗМАТЛИТ, 2005. 288с.
[3] Ландау Л.Д. К проблеме турбулентности // Докл.АН СССР.-1944. Т. 44 – с. 339-342.
[4] Струминский В.В. К нелинейной теории развития аэродинамических возмущений // Докл.АН СССР.-1963. Т.153, №3. – с.547-550.
[5] Stuart J.T. On the non-linear mechanics of hydrodynamic stability // J. Fluid Mech. – 1958. V.4. pt.1. – p. 1-24.
[6] Watson J. On the non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows, pt.2 // J. Fluid Mech. – 1960. V.9. pt.3. – p. 371-389.
[7] Reynolds W.C., Potter M.C. Finite-amplitude instability of parallel shear flows // J.Fluid Mech. 1967. V.27. pt.3. p.465-492
[8] Скобелев Б.Ю. Конечномерная инвариантная аппроксимация уравнений Навье-Стокса и автоколебательные режимы течения Пуазейля // ПММ.-1990-Т.54. № 3.-С.416-429.
[9] Дармаев Т.Г. Конечномерная инвариантная проекция трехмерных периодических возмущений в пограничном слое // Вестник БГУ. Сер.13: Математика и информатика. Вып.1. –Улан-Удэ: Изд-во БГУ, 2004. – с.124-134
[10] Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // УМН. 1961. Вып.3(99). С.17I-174.
[11] Йосс Ж., Джозеф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций/ Пер.с англ.-М.: Мир, 1983.-301с.
[12] Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения / Пер.с англ. М.: Мир, 1980.-607 с.
[13] Klebanoff P.S., Tidstrom K.D., Sargent L.M. The three-dimensional nature of boundary-layer instability // J. Pluid Mech.-1962.- V .12.-P t.1.-P .1-34.
[14] Качанов Ю.С., Козлов В.В., Левченко В.Я. Нелинейное развитие волны в пограничном слое // МЖГ.-1977.-№ 3-С.49-53.
[15] Козлов В.В., Левченко В.Я., Сарик В.С.(США) Образование трехмерных структур при переходе в пограничном слое. -Новосибирск, 1983.-(Препр./ АН СССР. Сиб. отделение. ИТПМ; № 10-83).
[16] Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. -М.: Наука, 1987.