САРНИУЛАГЧ КЕРР ОРЧИН ДАХЬ ГЭРЛИЙН СТАЦИОНАР ТМ ДОЛГИОНЫ АМПЛИТУД ТУСГАЙ ФУНКЦЭЭР ИЛЭРХИЙЛЭГДЭХ ОНЦГОЙ ТОХИОЛ.

Г.Очирбат, О.Нямсүрэн

[1]-д дурдсанаар

$E_x = iA(z)\exp(-i\omega t + ik\beta x), E_y = e(z)\exp(-i\omega t + ik\beta x), H_y = h(z)\exp(-i\omega t + ik\beta x),$

k – долгионы векторын вакуум дахь утга, β – рефракцийн тогтмол, $A(z), e(z), -h(z)$ амплитудууд.

Диэлектрикийн функц:

$\varepsilon = \varepsilon_l - A^2 - e^2$, ε_l-диэлектрикийн тогтмол. Оронгийн амплитудууд диэлектрикийн функцийн утгаар дараах байдалтай илэрхийлэгдэнэ.

$$e^2 = \frac{\beta^2(\varepsilon_l^2 - \varepsilon^2 - cnst)}{(2\beta^2 - \varepsilon)2\varepsilon}, \qquad (1)$$

$$A^2 = \varepsilon_l - \varepsilon - e^2, \quad h^2 = \frac{\varepsilon^2}{\beta^2}e^2, \qquad (2)$$

$cnst$ -интегралчлалын тогтмол.

Диэлектрикийн функцийн утга координатаас хамаарах хамаарлыг дараахь томъёо ашиглан олж болно.

$$z_0 - z_0 = \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \frac{\varepsilon/2 - e^2(\varepsilon,\beta,cnst)}{(2\beta^2 - \varepsilon)\sqrt{A^2(\varepsilon,\beta,cnst)h^2(\varepsilon,\beta,cnst) - 4co^2}} d\varepsilon, \qquad (3)$$

Үүнд co- интегралчлалын тогтмол. Интеграл $\varepsilon_l, \beta^2, cnst, co^2$ - дөрвөн параметраас хамаардаг. Интегралыг ерөнхий хэлбэрээр нь авч чадаагүй. Харин тогтмолуудын зарим тодорхой муж, зарим тодорхой утгуудад интегралыг авч болох ажээ. Чухам ямар муж ба утгуудад интегралыг авч болох нь манай шинжилгээнээс мэдэгдсэн. Бид [2]-д зарим тодорхой интервал дахь β^2-ийн утга бүрд $cnst, co$ -хоёр параметрийн огторгуй дахь нэг хэмжээст мужийн(муруй шугамын) цэг бүр дээр интеграл хэрхэн авагдахыг харуулж эцсийн илэрхийлэл бичсэн. Энэ нь ε-ээс хамаарсан $A^2(\varepsilon,\beta,cnst)h^2(\varepsilon,\beta,cnst)$ функцийн минимумын цэгтэй холбоотой байв. Энэ функцийн тахийлтын цэгийг ашиглан $4co^2$ параметрийн тодорхой утгуудад интегралыг тусгай функцээр илэрхийлэх асуудлыг дор авч үзнэ.

Өгөгдсөн $\varepsilon_1, \beta^2, cnst$-д $A^2(\varepsilon,\beta,cnst)h^2(\varepsilon,\beta,cnst)$ үржвэрийг ε-ээс хамаарсан функц гэж үзэж экстремумын цэгийг нь ξ-ээр тэмдэглэе.

ξ бол $\varepsilon_1, \beta^2, cnst$ параметруудаар илэрхийлэгдэх нь мэдээж,
$\xi = \xi(\varepsilon_1,\beta,cnst)$.

Эндээс $cnst$-ийг $\xi, \varepsilon_1, \beta^2$-ээс функц хэлбэртэй илэрхийлж болдог. Энэ функц хоёр мөчиртэй. Тухайлбал

$$cnst = cnst_1(\xi,\varepsilon_1,\beta) = (\varepsilon_1 - \xi)(3\xi + \varepsilon_1 - 4\beta^2) \qquad (4)$$

$$cnst = cnst_2(\xi,\varepsilon_1,\beta) = \varepsilon_1^{\,2} - 3\xi^2 + \frac{\xi^3}{\beta^2} \qquad (5)$$

Энэ хоёр мөчирд ерөнхий цэг бий.

$$cnst_1(\xi,\varepsilon_1,\beta) = cnst_2(\xi,\varepsilon_1,\beta) \qquad (6)$$

тэгшитгэлийн нэг язгуур нь $\xi = 2\beta^2$. Энэ язгуур дээрх утга:

$$cnst = cnst_1(2\beta^2,\varepsilon_1,\beta) = cnst_2(2\beta^2,\varepsilon_1,\beta) = \varepsilon_1^2 - 4\beta^4 \quad (7)$$

$cnst$-ийн энэ утганд (1) илэрхийллийн полюс алга болно. Харин $\xi = 2\beta^2$ бол - $\beta^2 = \frac{1}{4}$-ээс бусад бүх тохиолдолд экстремумын цэг биш. Тэрч байтугай $\varepsilon = 2\beta^2$ цэг бол ε-ийн авч болох утгын мужийн гадна оршиж ч болно. β^2 нь

$$\frac{1}{3}\varepsilon_1 < \beta^2 < \frac{2}{5}\varepsilon_1$$

нөхцлийг хангаж байхад яг ийм байдал үүсдэг. Бид β^2-ийн авах утгын тодорхой мужид, β^2 бүрд, интегралчлалын тогтмол, $cnst$ -

ийн утгыг (7) томъёогоор бодож тодорхойлох юм бол (3) интеграл авагдана гэдгийг харуулж эцсийн дүнг бичих болно. $cnst$ -ийг (7) томъёогоор тодорхойлбол

$$e^2 = \frac{\beta^2}{2\varepsilon}(2\beta^2 + \varepsilon) \tag{8}$$

$$A^2 = \frac{-2\varepsilon^2 + (2\varepsilon_l - \beta^2)\varepsilon - 2\beta^4}{2\varepsilon} \tag{9}$$

$$h^2 = \frac{\varepsilon}{2}(2\beta^2 + \varepsilon) \tag{10}$$

e^2, h^2 -зэрэг хэмжигдэхүүнүүд ($\varepsilon > 0$ гэж үзэж буй тул). $A^2 > 0$ байх муж нь $[b', a']$.

Үүнд

$$b' = \frac{2\varepsilon_l - \beta^2 - \sqrt{(2\varepsilon_l - \beta^2)^2 - 16b^4}}{4} \tag{11}$$

$$a' = \frac{2\varepsilon_l - \beta^2 + \sqrt{(2\varepsilon_l - \beta^2)^2 - 16b^4}}{4} \tag{12}$$

(11), (12) илэрхийлэл бодит утгатай байх β^2 -ийн муж нь

$$0 < \beta^2 < \frac{2}{5}\varepsilon_l \tag{13}$$

Энэ хязгаарлалтын хүрээнд

$$0 < b' < a' < \varepsilon_l \tag{14}$$

гэдгийг хялбархан мэдэж болно. ε -оос хамаарсан

$$A^2(\varepsilon, \beta, cnst)h^2(\varepsilon, \beta, cnst) = \frac{1}{2}(2\beta^2 + \varepsilon)(a' - \varepsilon)(\varepsilon - b') \tag{15}$$

функц $\varepsilon = \xi = \frac{2}{3}(\varepsilon_l - \beta^2)$ цэг дээр максимумтай. Максимум утга нь

$$(A^2h^2)_{\max} = \frac{1}{27}(2\beta^2 + \varepsilon_l)(2\varepsilon_l^2 - 10\beta^4 - \varepsilon_l\beta^2) \tag{16}$$

$4co^2$ параметр $[0,(A^2h^2)_{\max})$ завсарт утга авч болно. $cnst$ -ийг (7) томъёогоор бодож авахад интеграндын хүртвэрд $\beta^2-\varepsilon$ үржигдэхүүн ялгарч интегранд нь

$$-\frac{\varepsilon+\beta^2}{2\varepsilon\sqrt{\frac{1}{2}(a'-\varepsilon)(\varepsilon-b')(\varepsilon+2\beta^2)-4co^2}}$$

гэсэн авсаархан хэлбэрт орно.

$A^2(\varepsilon,\beta,cnst)h^2(\varepsilon,\beta,cnst)-4co^2=0$

тэгшитгэл авч үзье. Түүнд (9), (10) орлуулж тавихад

$$\varepsilon^3-\frac{2\varepsilon_l-5\beta^2}{2}\varepsilon^2+2\beta^6+8co^2=0 \qquad (17)$$

гэсэн куб тэгшитгэл болно.Тэгшитгэл гурван бодит язгууртай. Язгууруудыг өсөх дараалаар нь c,b,a гэж тэмдэглэвэл $c<b<a$ болно. Тэгэхдээ $c<-2\beta^2,\quad b'<b,\quad a<a'$. Эдгээр язгууруудыг ашиглан интеграндыг

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\frac{\beta^2}{\varepsilon})\frac{1}{\sqrt{(a-\varepsilon)(\varepsilon-b)(\varepsilon-c)}}$$

гэсэн стандарт интегралын таблиц хэрэглэж болохуйц авсаархан хэлбэрд оруулж болно. Доод хязгаарыг b, дээд хязгаарыг $\varepsilon(\varepsilon<a)$ гэж тавин интегралын таблиц [3] ашиглан хариуг бичвэл

$$z-z_0=G(b,\varepsilon)\equiv\sqrt{\frac{2}{a-c}}\{F(\chi,p)+\frac{\beta^2}{cb}[(c-b)\Pi(\chi,p^2\frac{c}{b},p)+bF(\chi,p)]\} \qquad (18)$$

Үүнд $F(\chi,p)$ - нэгдүгээр төрлийн эллипслэг интеграл, $\Pi(\varphi,n,k)$ -гуравдугаар төрлийн эллипслэг интеграл,

$$\chi=\arcsin\sqrt{\frac{(a-c)(\varepsilon-b)}{(a-b)(\varepsilon-c)}},\quad p=\sqrt{\frac{a-b}{a-c}}$$

$c,b,a\ (c<b<a)$ бол (17) тэгшитгэлийн журамлагдсан гурван язгуур.

(18)-д орж буй эллипслэг интегралууд нь $b \le \varepsilon < a$ мужид хэрэглэгдэнэ. (18)-аас урвуугаар

$$\varepsilon(z) = b + am(z - z_0), \quad 0 \le z - z_0 \le G(b, a-0) \tag{19}$$

Энэ функцийн аргумент z нь $[z_0, z_0 + G(b, a-0)]$ гэсэн мужид утга авч болохоор байгаа. Энэ функцийг $[z_0, \infty)$ мужид $2G(b, a-0)$ үетэй үет функц болгон үргэлжлүүлэн тодорхойлж болно. Үргэлжлүүлэхдээ $z = z_0 + nG(b, a-0), n = 1,2,..$ цэгүүд дээр түүнийг тэгш хэмтэй байлгах хэрэгтэй.

Резюме

Для зависимости диэлектрической функции от координаты в задаче распространения световых ТМ волн в дефокусирующей керр среде давно получено, автором этой статьи, формальное интегральное выражение, содержащее четыре параметры, которое до сих пор не удалось выразить через известные функции. В настоящей работе при произвольном фиксированном значении диэлектрической постоянной, в каждом значении константа рефракции из некоторой области его значений, в вполне определенном значении одного из оставщихся двух параметров, которое определяется через диэлектрическую постоянную и постоянную рефракции, и при прозвольном значении другого из оставщихся двух параметров из некоторой области его значений интеграл брался в виде линейной комбинации эллиптических интегралов первого и третьего родов.

ИШЛЭЛ

4. Г.Очирбат, О.Нямсүрэн, Рассеяние света в дефокусирующей среде на линейной подложке. Анализ формального решения, 2000, Препринт ОИЯИ, Р17-2000-241, Дубна.
5. Г.Очирбат, О.Нямсүрэн, Сарниулагч керр орчин дахь гэрлийн стационар ТМ долгионы амплитуд тусгай функцээр илэрхийлэгдэх тохиол. I, 2003, МУИС,эрдэм шинжилгээний бичиг №, Улаанбаатар.
6. И. С. Градштейн и И. М. Рыжик, Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений, 1963, ФМ, Москва.