САРНИУЛАГЧ КЕРР ОРЧИН ДАХЬ ГЭРЛИЙН СТАЦИОНАР ТМ ДОЛГИОНЫ АМПЛИТУД ТУСГАЙ ФУНКЦЭЭР ИЛЭРХИЙЛЭГДЭХ ТОХИОЛ. II

Г.Очирбат, О.Нямсүрэн

[1]-д дурдсанаар
$E_x = iA(z)\exp(-i\omega t + ik\beta x), E_y = e(z)\exp(-i\omega t + ik\beta x), H_y = h(z)\exp(-i\omega t + ik\beta x)$,
k – долгионы векторын вакуум дахь утга, β – рефракцийн тогтмол, $A(z), e(z), -h(z)$ амплитудууд.
Диэлектрикийн функц:

$\varepsilon = \varepsilon_l - A^2 - e^2$, ε_l-диэлектрикийн тогтмол. Оронгийн амплитудууд диэлектрикийн функцийн утгаар дараах байдалтай илэрхийлэгдэнэ.

$$e^2 = \frac{\beta^2(\varepsilon_l{}^2 - \varepsilon^2 - cnst)}{(2\beta^2 - \varepsilon)2\varepsilon},$$

$$A^2 = \varepsilon_l - \varepsilon - e^2, \quad h^2 = \frac{\varepsilon^2}{\beta^2}e^2,$$

$cnst$ -интегралчлалын тогтмол.

Диэлектрикийн функцийн утга координатаас хамаарах хамаарлыг дараахь томъёо ашиглан олж болно.

$$z_0 - z_0 = \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \frac{\varepsilon/2 - e^2(\varepsilon,\beta,cnst)}{(2\beta^2 - \varepsilon)\sqrt{A^2(\varepsilon,\beta,cnst)h^2(\varepsilon,\beta,cnst) - 4co^2}}d\varepsilon, \quad (1)$$

Үүнд co- интегралчлалын тогтмол. Интеграл $\varepsilon_l, \beta^2, cnst, co^2$ - дөрвөн параметраас хамаардаг. Интегралыг ерөнхий хэлбэрээр нь авч чадаагүй. Харин тогтмолуудын зарим тодорхой муж, зарим тодорхой утгуудад интегралыг авч болох ажээ. Чухам ямар муж ба утгуудад интегралыг авч болох нь манай шинжилгээнээс мэдэгдсэн. Бид [2]-д зарим тодорхой интервал дахь β^2-ийн утга бүрд $cnst, co$ -хоёр параметрийн огторгуй дахь нэг хэмжээст мужийн(муруй шугамын) цэг бүр дээр интеграл хэрхэн авагдахыг харуулж эцсийн илэрхийлэл бичсэн. Энэ нь ε-ээс хамаарсан $A^2(\varepsilon,\beta,cnst)h^2(\varepsilon,\beta,cnst)$ функцийн минимумын цэгтэй холбоотой байв. Энэ функцийн тахийлтын цэгийг ашиглан $4co^2$ параметрийн тодорхой утгуудад интегралыг тусгай функцээр илэрхийлэх асуудлыг дор авч үзнэ.

Өгөгдсөн $\varepsilon_l, \beta^2, cnst$-д $A^2(\varepsilon,\beta,cnst)h^2(\varepsilon,\beta,cnst)$ үржвэрийг ε-ээс хамаарсан функц гэж үзэж экстремумын цэгийг нь ξ-ээр тэмдэглэе.

ξ бол $\varepsilon_l, \beta^2, cnst$ параметруудаар илэрхийлэгдэх нь мэдээж, $\xi = \xi(\varepsilon_l, \beta, cnst)$.

Эндээс $cnst$-ийг $\xi, \varepsilon_l, \beta^2$-ээс функц хэлбэртэй илэрхийлж болдог. Энэ функц хоёр гишүүнтэй. Тухайлбал

$$cnst = cnst_1(\xi,\varepsilon_l,\beta) = (\varepsilon_l - \xi)(3\xi + \varepsilon_l - 4\beta^2) \qquad (2)$$

$$cnst = cnst_2(\xi,\varepsilon_l,\beta) = \varepsilon_l^2 - 3\xi^2 + \frac{\xi^3}{\beta^2} \qquad (3)$$

Эхний мөчирд

$$\xi = \gamma = \frac{2\beta^2 + \varepsilon_l}{3} \qquad (4а)$$

гэсэн экстремумын цэг нь тахийлтын цэг байдаг бол сүүлийн мөчирд

$$\xi = \delta = -\beta^2 + \sqrt{\beta^4 + 2\varepsilon_l\beta^2} \qquad (4б)$$

гэсэн экстремумын цэг нь мөн тахийлтын цэг байдаг. Эхний тахийлтын цэгийг нэгдүгээр төрлийн, хоёр дахь тахийлтын цэгийг хоёрдугаар төрлийн тахийлтын цэг гэж тус тус нэрлэж байгаа. Нэгдүгээр төрлийн тахийлтын цэг $0 < \beta^2 < \varepsilon_l$ нөхцөлд.

хоёрдугаар төрлийнх нь $\beta^2 < \frac{2}{3}\varepsilon_l$ нөхцөлд бий болдог.

ҮЕТ ФУНКЦ

[2]-д хийсэн $\varepsilon = \xi + y$ орлуулгыг хоёрдугаар мөчирд хэрэглэе, ξ -экстремумын цэг.

$$A^2(\xi+y,\beta,cnst_2(\xi,\varepsilon_1,\beta))h^2(\xi+y,\beta,cnst_2(\xi,\varepsilon_1,\beta))-4co^2 =$$

$$=\frac{A_5y^5+A_4y^4+A_3y^3+(A_2-16co^2)y^2+(A_1+32co^2(2\beta^2-\xi))y+A_0-16co^2(2\beta^2-\xi)^2}{4(2\beta^2-\varepsilon)^2} \quad (5)$$

Үүнд

$$A_5=-2, \quad A_4=-10\xi+2\varepsilon_1+3\beta^2, \quad (5а)$$

$$A_3=-\frac{2}{\beta^2}\xi^3-14\xi^2+(8\varepsilon_1+12\beta^2)\xi-4\beta^2\varepsilon_1 \quad (5б)$$

$$A_2=-\frac{6}{\beta^2}\xi^4+\frac{2\varepsilon_1}{\beta^2}\xi^3+(6\varepsilon_1+12\beta^2)\xi^2-12\beta^2\varepsilon_1\xi \quad (5в)$$

$$A_1=-\frac{6}{\beta^2}\xi^5+\frac{4\varepsilon_1+12\beta^2}{\beta^2}\xi^4-8\varepsilon_1\xi^3 \quad (5г)$$

$$A_0=-\frac{3}{\beta^2}\xi^6+\frac{2\varepsilon_1+12\beta^2}{\beta^2}\xi^5+(-8\varepsilon_1-12\beta^2)\xi^4+8\beta^2\varepsilon_1\xi^3 \quad (5д)$$

$4co^2$ параметрийн утгыг

$$4co^2=A^2(\xi,\beta,cnst_2(\xi,\varepsilon_1,\beta))h^2(\varepsilon,\beta,cnst_2(\xi,\varepsilon_1,\beta))=\frac{(2\varepsilon_1-3\xi)\xi^3}{4\beta^2} \quad (5е)$$

гэж сонгож авахад (5)- ийн хүртвэрд сүүлчийн хоёр гишүүн тэг болж хувирдаг.

$$A_1+32co^2(2\beta^2-\xi)=0, \quad A_0-16co^2(2\beta^2-\xi)^2=0$$

Одоо экстремумын цэгээр $\xi=\delta$ ((4б) томъёо) гэсэн цэгийг сонгож авъя. Тэхэд (5)- ийн хүртвэрд бас

$$A_2-16co^2=0$$

болно, Энэ нь $\xi=\delta$ бол тахийлтын цэг мөн гэдгийг харуулж байгаа хэрэг.

Интеграндын тодорхойлогдох мужийг тогтоох асуудал авч үзье. (5)-ийн хүртвэрийг $y^3\varphi(y)$ гэж бичвэл

$$\varphi(y) = -2y^2 + A_4 y + A_3$$

болно. Үүнд

$$A_4 = -10\delta + 2\varepsilon_l + 3\beta^2,$$

$$A_3 = -\frac{2}{\beta^2}\delta^3 - 14\delta^2 + (8\varepsilon_l + 12\beta^2)\delta - 4\beta^2\varepsilon_l$$

Энд $A_3 > 0$ гэж хялбархан үзүүлж болно. Иймд

$$y\varphi(y) = 0 \tag{6}$$

тэгшитгэл гурван бодит язгууртай. Язгууруудыг өсөх дараалаар нь c, b, a гэж тэмдэглэвэл $c < b < a$ болно. Тэгэхдээ $c < 0,\ b = 0,\ 0 < a$.

$$c = \frac{1}{4}\{13\beta^2 + 2\varepsilon_l - 10\sqrt{2\beta^2\varepsilon_l + \beta^4} - \sqrt{-(8\varepsilon_l + 4\beta^2)\sqrt{2\beta^2\varepsilon_l + \beta^4} + 13\beta^4 + 28\varepsilon_l\beta^2 + 4\varepsilon_l^2}\}$$

$$a = \frac{1}{4}\{13\beta^2 + 2\varepsilon_l - 10\sqrt{2\beta^2\varepsilon_l + \beta^4} + \sqrt{-(8\varepsilon_l + 4\beta^2)\sqrt{2\beta^2\varepsilon_l + \beta^4} + 13\beta^4 + 28\varepsilon_l\beta^2 + 4\varepsilon_l^2}\} \tag{7}$$

Интеграндын хувьсагч y -ийн тодорхойлогдох муж нь $[0, a]$ сегмент юм.

Интеграндын хүртвэр

$$\frac{\varepsilon}{2} - e^2(\varepsilon, \beta, cnst_2(\xi, \varepsilon_l, \beta))$$

-ийг авч үзье. Энэ илэрхийлэлд $\varepsilon = \delta + y$ орлуулга хийхэд y-үржигдэхүүн гарч ирнэ.

$$\frac{\varepsilon}{2} - e^2(\varepsilon, \beta, cnst_2(\delta, \varepsilon_l, \beta)) = y\left(1 + \frac{B_1}{\varepsilon} + \frac{B_2}{2\beta^2 - \varepsilon}\right)$$

$$B_1 = \frac{(3\beta^2 - \delta)\delta}{2\beta^2}, \quad B_2 = \frac{(3\beta^2 - \delta)(\delta + 2\beta^2) - 4\beta^4}{2\beta^2} \tag{8}$$

(1) интеграл нь

$$z-z_0=G(0,y)\equiv\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^y\left(1+\frac{B_1}{\varepsilon}+\frac{B_2}{2\beta^2-\varepsilon}\right)\frac{dy}{\sqrt{(a-y)y(y-c)}},\ y=\varepsilon-\delta \qquad (9)$$

хэлбэрт орно. Интегралын таблиц [3] -аас харахад үүнийг тусгай функцээр илэрхийлж болох ажээ:

$$z-z_0=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a-c}}\{F(\chi,p)+\frac{B_1}{(c+\delta)\delta}\left[c\Pi(\chi,p^2\frac{c+\delta}{-\delta},p)+\delta F(\chi,p)\right]-$$
$$\frac{B_2}{(c-2\beta^2+\delta)(-2\beta^2+\delta)}[c\Pi(\chi,p^2\frac{c-2\beta^2+\delta}{2\beta^2-\delta},p)+(-2\beta^2+\delta)F(\chi,p)]\} \qquad (10)$$

Үүнд, $F(\chi,p)$ -нэгдүгээр төрлийн эллипслэг интеграл, $\Pi(\varphi,n,k)$ -гуравдугаар төрлийн эллипслэг интеграл, B_1,B_2 -нь (8) томъёогоор тодорхойлогдоно.

$$\chi=\arcsin\sqrt{\frac{(a-c)(\varepsilon-\delta)}{a(\varepsilon-\delta-c)}},\quad p=\sqrt{\frac{a}{a-c}}$$

$c,a\ (c<0<a)$ бол (6) тэгшитгэлийн язгуурууд бөгөөд 7-р томъёогоор илэрхийлэгдэнэ. . (10)-д орж буй эллипслэг интегралууд нь $0\le y\le a$ буюу $\delta\le\varepsilon\le a+\delta$ мужид сингуляр цэггүй. (10) –аас урвуугаар

$$\varepsilon(z)=\delta+am(z-z_0),\quad 0\le z-z_0\le G(0,a) \qquad (11)$$

гэж тодорхойлж болно. Энэ функцийн аргумент z-нь $[z_0,z_0+G(0,a)]$ гэсэн мужид утга авч болохоор байгаа. Энэ функцийг $[z_0,\infty)$ мужид $2G(0,a)$ үетэй үет функц болгон үргэлжлүүлэн тодорхойлж болно. Үргэлжлүүлэхдээ $z=z_0+nG(0,a),\ n=1,2,..$ цэгүүд дээр түүнийг тэгш хэмтэй байлгах хэрэгтэй.

ҮЕТ БИШ ФУНКЦ

[2]-д хийсэн $\varepsilon=\xi+y$ орлуулгыг нэгдүгээр мөчирд хэрэглээ, ξ - экстремумын цэг.

$$A^2(\xi+y,\beta,cnst_1(\xi,\varepsilon_1,\beta))h^2(\xi+y,\beta,cnst_1(\xi,\varepsilon_1,\beta))-4co^2=$$
$$=\frac{A_5y^5+A_4y^4+A_3y^3+(A_2-16co^2)y^2+(A_1+32co^2(2\beta^2-\xi))y+A_0-16co^2(2\beta^2-\xi)^2}{4(2\beta^2-\varepsilon)^2} \quad (12)$$

Энэ удаад коэффициентууд нь

$$A_5=-2, \quad A_4=-10\xi+2\varepsilon_1+3\beta^2, \quad (12а)$$

$$A_3=-14\xi^2+(4\varepsilon_1+4\beta^2)\xi+4\beta^2\varepsilon_1 \quad (12б)$$

$$A_2=-2\xi^3-(6\varepsilon_1+12\beta^2)\xi^2+(4\varepsilon_1^2+24\varepsilon_1\beta^2+8\beta^4)\xi-8\varepsilon_1^2\beta^2-8\varepsilon_1\beta^4 \quad (12в)$$

$$A_1=8\xi^4+(-16\varepsilon_1-24\beta^2)\xi^3+(8\varepsilon_1^2+48\beta^2\varepsilon_1+16\beta^4)\xi^2+(-24\varepsilon_1^2\beta^2-$$
$$-32\varepsilon_1\beta^4)\xi+16\beta^4\varepsilon_1^2 \quad (12г)$$

$$A_0=4\xi^5+(-8\varepsilon_1-20\beta^2)\xi^4+(4\varepsilon_1^2+40\beta^2\varepsilon_1+32\beta^4)\xi^3+(-64\varepsilon_1\beta^4-$$
$$-20\beta^2\varepsilon_1^2-16\beta^6)\xi^2+(32\varepsilon_1^2\beta^4+32\varepsilon_1\beta^6)\xi-16\varepsilon_1^2\beta^6 \quad (12д)$$

Одоо $4co^2$ параметрийн утгыг

$$4co^2=A^2(\xi,\beta,cnst_1(\xi,\varepsilon_1,\beta))h^2(\xi,\beta,cnst_1(\xi,\varepsilon_1,\beta))=(\varepsilon_1-\xi)^2(\xi-\beta^2) \quad (12е)$$

гэж сонгож авъя. Тэхэд (12)- ийн хүртвэрд сүүлчийн хоёр гишүүн тэг болж хувирна.

$$A_1+32co^2(2\beta^2-\xi)=0, \qquad A_0-16co^2(2\beta^2-\xi)^2=0$$

Одоо экстремумын цэгээр $\xi=\gamma$ ((4а) томъёо) гэсэн цэгийг сонгож авъя. Тэхэд (5)- ийн хүртвэрд бас

$$A_2-16co^2=0$$

болно, Энэ нь $\xi=\gamma$ бол тахийлтын цэг мөн гэдгийг харуулж байгаа хэрэг.

Интеграндын тодорхойлогдох мужийг тогтоох асуудал авч үзье. (12)-ийн хүртвэрийг $y^3\psi(y)$ гэж бичвэл

$$\psi(y)=-2y^2+A_4y+A_3$$

болно. Үүнд

$$A_4=-\frac{11\beta^2+4\varepsilon_1}{3} \quad (13а)$$

$$A_3 = -\frac{2}{9}(4\beta^2 - \varepsilon_l)^2 \qquad (13b)$$

дараахь куб тэгшитгэл авч үзье.

$$y\psi(y) = 0 \qquad (14)$$

Үүний гурван язгуур бүгд бодитой. Язгууруудыг өсөх дарааллаар нь c, b, a гэж тэмдэглэвэл $c < b < a$ болно. Тэгэхдээ $c < 0,\ b < 0, a = 0$

$$c = \frac{-11\beta^2 - 4\varepsilon_l - \sqrt{216\beta^2\varepsilon_l - 135\beta^4}}{12} \qquad (15a)$$

$$b = \frac{-11\beta^2 - 4\varepsilon_l + \sqrt{216\beta^2\varepsilon_l - 135\beta^4}}{12} \qquad (15b)$$

Интеграндын хувьсагч y-ийн тодорхойлогдох муж нь $[b, 0)$ завсар юм.

Интеграндыг дараахь хэлбэрт оруулж болно

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{B_1}{2\beta^2 - \varepsilon} + \frac{B_2}{\varepsilon} + \frac{B_3}{y}\right)\frac{1}{\sqrt{(-y)(y-b)(y-c)}}$$

Энэ удаад

$$B_1 = \frac{4\beta^2 - \varepsilon_l}{2}, \quad B_2 = \frac{-\varepsilon_l^2 - 4\beta^4 + 8\varepsilon_l\beta^2}{2(2\beta^2 + \varepsilon_l)}, \quad B_3 = \frac{(\varepsilon_l - 4\beta^2)^2}{3(2\beta^2 + \varepsilon_l)} \qquad (16)$$

Интеграндын тодорхойлолтын муж дотор онцгой цэг байхгүй. Харин интегранд $y \to 0-$ үед $[-y]^{-3/2}$-ийн хуулиар төгсгөлгүй их болно. Интегралын таблиц [3] -аас харахад үүнийг тусгай функцээр илэрхийлж болох ажээ. Интегралын доод хязгаарыг b, дээд хязгаарыг $y(< 0)$ гэж тавин интегралыг y-ээр авбал

$$z-z_0=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-c}}\{\frac{-B_2}{(c+\gamma)(b+\gamma)}[(c-b)\Pi(\chi,p^2\frac{c+\gamma}{-b-\gamma},p)+(b+\gamma)F(\chi,p)]+$$
$$+\frac{B_1}{c-2\beta^2+\gamma}\frac{1}{b-2\beta^2+\gamma}[(c-b)\Pi(\chi,p^2\frac{c-2\beta^2+\gamma}{-b+2\beta^2-\gamma},p)+(b-2\beta^2+\gamma)F(\chi,p)]- \quad (17)$$
$$-\frac{B_3}{cb}[(c-b)\Pi(\chi,p^2\frac{c}{-b},p)+bF(\chi,p)]-F(\chi,p)\}$$

c,b бол (14) тэгшитгэлийн язгуурууд бөгөөд (15a),(15b) -ээр илэрхийлэгдэнэ. B_1, B_2, B_3-нь (16) томъёогоор тодорхойлогдоно.

$$\chi=\arcsin\sqrt{\frac{c(\varepsilon-\gamma-b)}{b(\varepsilon-\gamma-c)}},\quad p=\sqrt{\frac{b}{c}}$$

Энэ илэрхийлэлийг $\gamma+b\le\varepsilon<\gamma$ мужид хэрэглэнэ.

(17) - оос урвуугаар

$$\varepsilon(z)=b+\gamma+am(z-z_0),$$

гэж болно. Энэ функцийн $\varepsilon\to\gamma-0$ үеийн асимптотыг бичвэл

$$\gamma-\varepsilon\to\sqrt{\frac{2}{bc}}B_3\frac{1}{(z-z_0)^2}$$

Резюме

Для зависимости диэлектрической функции от координаты в задаче распространения световых ТМ волн в дефокусирующей керр среде давно получено, автором этой статьи, формальное интегральное выражение, содержащее четыре параметры, которое до сих пор не удалось выразить через известные функции. В настоящей работе при произвольном фиксированном значении диэлектрической постоянной, в каждом значении константа рефракции из некоторой области его значений ,и оперделенном парном значении остальных двух параметров , которое определяется через диэлектрическую постоянную и постоянную рефракции, интеграл брался в виде линейной комбинации эллиптических интегралов первого и третьего родов.

ИШЛЭЛ

1. Г.Очирбат, О.Нямсүрэн, Рассеяние света в дефокусирующей среде на линейной подложке. Анализ формального решения, 2000. Препринт ОИЯИ, Р17-2000-241, Дубна.
2. Г.Очирбат, О.Нямсүрэн, Сарниулагч керр орчин дахь гэрлийн стационар ТМ долгионы амплитуд тусгай функцээр илэрхийлэгдэх тохиол. I, 2003, МУИС,эрдэм шинжилгээний бичиг №, Улаанбаатар.
3. И.С.Градштейн и И. М. Рыжик, Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений, 1963, ФМ, Москва.