САРНИУЛАГЧ КЕРР ОРЧИН ДАХЬ ГЭРЛИЙН СТАЦИОНАР ТМ ДОЛГИОНЫ АМПЛИТУД ТУСГАЙ ФУНКЦЭЭР ИЛЭРХИЙЛЭГДЭХ ТОХИОЛ. I

Г.Очирбат, О.Нямсүрэн

[1]-д дурдсанаар
$E_x = iA(z)\exp(-i\omega t + ik\beta x), E_y = e(z)\exp(-i\omega t + ik\beta x), H_y = h(z)\exp(-i\omega t + ik\beta x)$,
k – долгионы векторын вакуум дахь утга, β – рефракцийн тогтмол, $A(z), e(z), -h(z)$ амплитудууд.

Диэлектрикийн функц:

$\varepsilon = \varepsilon_l - A^2 - e^2$, ε_l-диэлектрикийн тогтмол. Оронгийн амплитудууд диэлектрикийн функцийн утгаар дараахь байдалтай илэрхийлэгдэнэ.

$$e^2 = \frac{\beta^2(\varepsilon_l^2 - \varepsilon^2 - cnst)}{(2\beta^2 - \varepsilon)2\varepsilon},$$

$$A^2 = \varepsilon_l - \varepsilon - e^2, \quad h^2 = \frac{\varepsilon^2}{\beta^2}e^2,$$

$cnst$ -интегралчлалын тогтмол.

Диэлектрикийн функцийн утга координатаас хамаарах хамаарлыг дараах томъёо ашиглан олж болно.

$$z_0 - z_0 = \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \frac{\varepsilon/2 - e^2(\varepsilon, \beta, cnst)}{(2\beta^2 - \varepsilon)\sqrt{A^2(\varepsilon, \beta, cnst)h^2(\varepsilon, \beta, cnst) - 4co^2}} d\varepsilon, \quad (1)$$

Үүнд co -интегралчлалын тогтмол. Интеграл $\varepsilon_l, \beta^2, cnst, co^2$ - дөрвөн параметраас хамаардаг. Интегралыг ерөнхий хэлбэрээр нь авч чадаагүй. Харин тогтмолуудын зарим тодорхой муж, зарим тодорхой утгуудад интегралыг авч болох ажээ. Чухам ямар муж ба утгуудад интегралыг авч болох нь манай шинжилгээнээс мэдэгдсэн. Бид зарим тодорхой интервал дахь β^2-ийн утга бүрд $cnst, co$ -хоёр параметрийн огторгуй дахь нэг хэмжээст мужийн(муруй шугамын) цэг бүр дээр интеграл хэрхэн авагдахыг харуулж эцсийн илэрхийлэл бичих болно.

ҮЕТ ФУНКЦ

Өгөгдсөн $\varepsilon_l, \beta^2, cnst$ -д $A^2(\varepsilon,\beta,cnst)h^2(\varepsilon,\beta,cnst)$ үржвэрийг ε -ээс хамаарсан функц гэж үзэж экстремумын цэгийг нь ξ -ээр тэмдэглэе.

ξ бол $\varepsilon_l, \beta^2, cnst$ параметруудаар илэрхийлэгдэх нь мэдээж, $\xi=\xi(\varepsilon_l,\beta,cnst)$.

Эндээс $cnst$ -ийг $\xi, \varepsilon_l, \beta^2$-ээс функц хэлбэртэй илэрхийлж болдог. Энэ функц хоёр мөчиртэй. Тухайлбал

$$cnst=cnst_1(\xi,\varepsilon_l,\beta)=(\varepsilon_l-\xi)(3\xi+\varepsilon_l-4\beta^2) \qquad (2)$$

$$cnst=cnst_2(\xi,\varepsilon_l,\beta)=\varepsilon_l^{\,2}-3\xi^2+\frac{\xi^3}{\beta^2} \qquad (3)$$

Цаашид дараахь хоёр хэмжигдүүн хэрэг болно.

$$\delta=-\beta^2+\sqrt{\beta^4+2\varepsilon_l\beta^2} \qquad (3а)$$

$$\gamma=\frac{2\beta^2+\varepsilon_l}{3} \qquad (3б)$$

β^2 нь

$0<\beta^2<\frac{1}{4}\varepsilon_l$ байхад ξ-г $2\beta^2<\xi<\delta$ байхаар авбал, (4a)

эсвэл β^2 нь

$\frac{1}{4}\varepsilon_l<\beta^2<\frac{1}{3}\varepsilon_l$ байхад ξ-г $\delta<\xi<2\beta^2$ байхаар авбал, (4b)

эсвэл β^2 нь

$\frac{1}{3}\varepsilon_l<\beta^2<\frac{2}{3}\varepsilon_l$ байхад ξ-г $\delta<\xi<\frac{2}{3}\varepsilon_l$ байхаар авч (4c)

$cnst$ -ийг (3) томъёогоор тодорхойлбол $\varepsilon=\xi$ нь

$A^2(\varepsilon,\beta,cnst)h^2(\varepsilon,\beta,cnst)$ функцийн минимумийн цэг байх ёстой гэдэг нь ерөнхий шинжилгээнээс мэдэгддэг. Үүнийг бас дор тодорхой харуулах болно. $\varepsilon=\xi+y$ гэсэн орлуулга хийхэд

$$A^2(\xi+y,\beta,cnst_2(\xi,\varepsilon_1,\beta))h^2(\xi+y,\beta,cnst_2(\xi,\varepsilon_1,\beta))-4co^2=$$
$$=\frac{A_5y^5+A_4y^4+A_3y^3+(A_2-16co^2)y^2+(A_1+32co^2(2\beta^2-\xi))y+A_0-16co^2(2\beta^2-\xi)^2}{4(2\beta^2-\varepsilon)^2} \quad (5)$$

Үүнд

$$A_5=-2,\quad A_4=-10\xi+2\varepsilon_l+3\beta^2, \quad (5а)$$

$$A_3=-\frac{2}{\beta^2}\xi^3-14\xi^2+(8\varepsilon_l+12\beta^2)\xi-4\beta^2\varepsilon_l \quad (5б)$$

$$A_2=-\frac{6}{\beta^2}\xi^4+\frac{2\varepsilon_l}{\beta^2}\xi^3+(6\varepsilon_l+12\beta^2)\xi^2-12\beta^2\varepsilon_l\xi \quad (5в)$$

$$A_1=-\frac{6}{\beta^2}\xi^5+\frac{4\varepsilon_l+12\beta^2}{\beta^2}\xi^4-8\varepsilon_l\xi^3 \quad (5г)$$

$$A_0=-\frac{3}{\beta^2}\xi^6+\frac{2\varepsilon_l+12\beta^2}{\beta^2}\xi^5+(-8\varepsilon_l-12\beta^2)\xi^4+8\beta^2\varepsilon_l\xi^3 \quad (5д)$$

Одоо $4co^2$ параметрийн утгыг

$$4co^2=A^2(\xi,\beta,cnst_2(\xi,\varepsilon_l,\beta))h^2(\varepsilon,\beta,cnst_2(\xi,\varepsilon_l,\beta))=\frac{(2\varepsilon_l-3\xi)\xi^3}{4\beta^2} \quad (5е)$$

гэж сонгож авъя. Тэгэхэд (5)- ийн хүртвэрд сүүлчийн хоёр гишүүн тэг болж хувирна.

$$A_1+32co^2(2\beta^2-\xi)=0,\quad A_0-16co^2(2\beta^2-\xi)^2=0$$

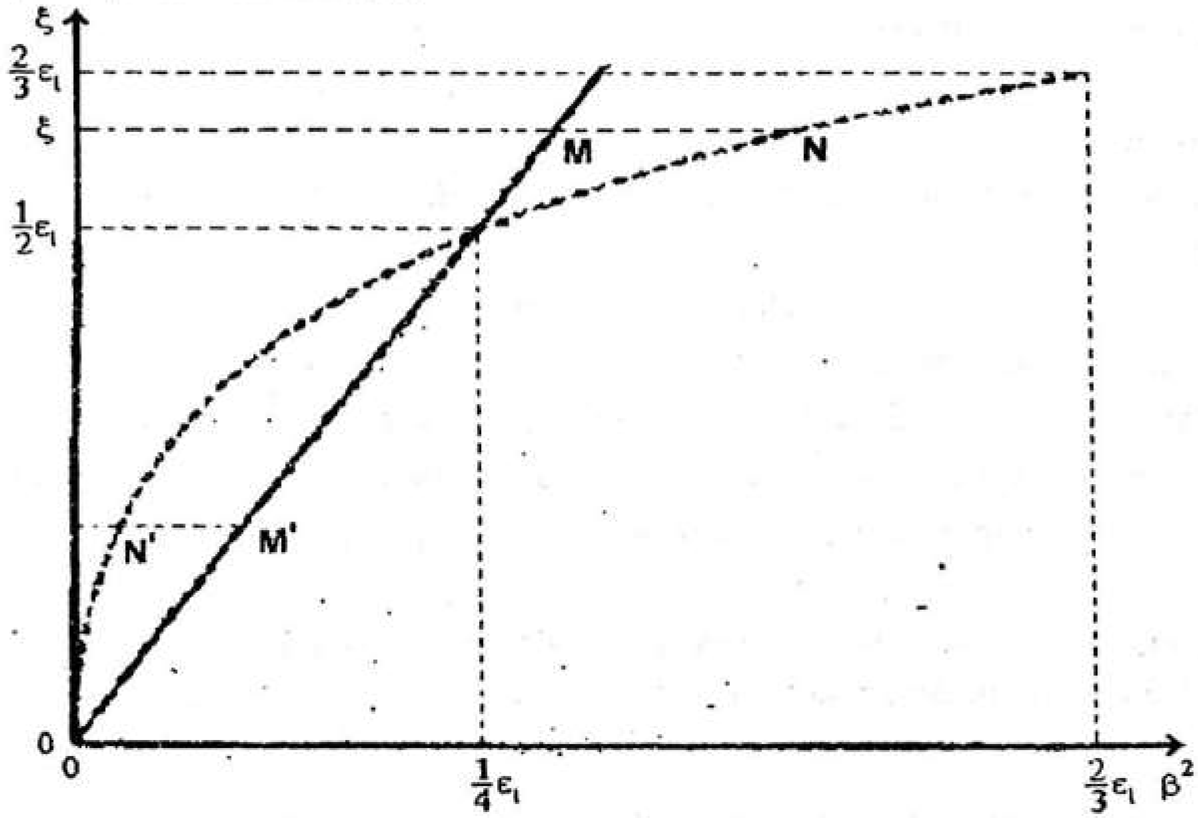
Энэ нь ξ-бол экстремумын цэг мөн гэдгийг харуулж байгаа хэрэг. Харин энэ экстремумын цэг нь миниумийн цэг юм бол

$$A_2-16co^2>0$$

гэсэн тэнцэтгэл биш биелэж байвал зохино. A_2, $4co^2$-параметруудын утгыг (5в), (5е) томъёоноос орлуулж энэ тэнцэтгэлбишийг дэлгэрэнгүй бичвэл

$$\frac{(12\xi^2 - 12\varepsilon_l\xi)\beta^4 + 6\varepsilon_l\xi^2\beta^2 - 3\xi^4}{\beta^2} > 0 \qquad (6)$$

ε_l-ийг өгөгдсөн гэж бодоход β^2, ξ гэсэн хоёр параметр (4)-д заасан хязгаарын дотор хувьсах тул тэнцэтгэлбиш зөв эсэх нь нүдэнд шууд тусахгүй байна. Шалгая.



Зураг 1. β^2, ξ -ийн авч болох утгууд буюу (4) хязгаарлалтын бүдүүвч зураг.

1-р зураг. (4) хязгаарлалтаар, (β^2, ξ) нь $\xi = \delta$ (3а томъёо), $\xi = 2\beta^2$, $\xi = 2/3\varepsilon_l$ шугамуудаар хязгаарлагдсан талбай дээр утга авна.

(6)-ийн зүүн талд байгаа бутархайн хүртвэрийг $\rho(\beta, \xi)$ -гэж тэмдэглэе. $\rho(\beta, \xi)$ нь өгөгдсөн ξ -д β^2 -ээс квадрат функц. β^2 -ийн квадратын өмнөх коэффициент сөрөг: $12\xi(\xi-\varepsilon_l)<0$, учир нь $\xi<\varepsilon_l$. өгөгдсөн $\xi\in(0.,2/3\varepsilon_l)$-д энэ функц доош харсан парабол дүрсэлнэ. 1-р зурагт M(буюу M') цэг $(\beta^2=1/2\xi)$ ба N(буюу N') цэг $(\beta^2=\xi^2/(2\varepsilon_l-2\xi))$ дээр $\rho(\beta,\xi)=0$, эдгээр цэгүүд бол парабол β^2-тэнхлэгийг огтолсон цэгүүд мөн. Тэгэхлээр ξ-д энэ хоёр цэгийн хоорон дахь аль ч β^2-утгад функц эерэг утгатай байж таарна. Энэ нь (6) тэнцэтгэлбиш зөв гэсэн үг. *Интеграндын тодорхойлогдох мужийг* тогтоох асуудал авч үзье. (5)-ийн хүртвэрийг $y^2\varphi(y)$ гэж бичвэл

$$\varphi(y)=-2y^3+A_4y^2+A_3y+A_2-16c\upsilon^2$$

Энэ 3-р зэргийн олон гишүүнтийн коэффициентууд (5а),(5б),(5в) ба (5е) ёсоор β^2,ξ ээс хамаарна $\varphi(y)$-функцийн бүдүүвчийг 2-р зурагт үзүүлэв. Энэ функц $y=0$ дээр эерэг утгатай, $\varepsilon=0$ буюу $y=-\xi$ дээр сөрөг утгатай(хавсралт 1), $\varphi(-\xi)<0$, тул

$$\varphi(y)=0 \qquad (7)$$

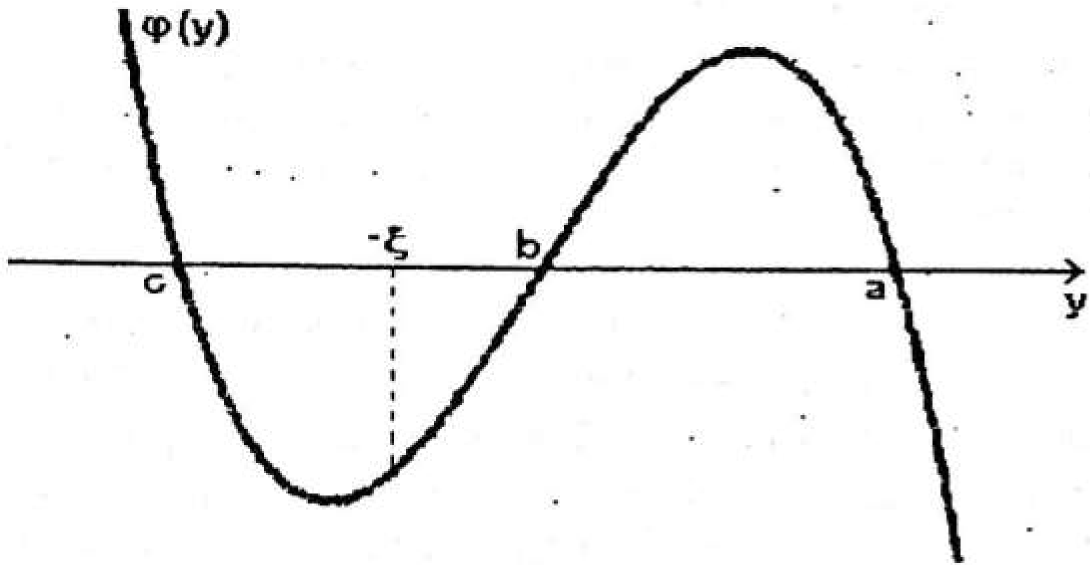
тэгшитгэл гурван бодит язгууртай. Язгууруудыг өсөх дараалаар нь c,b,a гэж тэмдэглэвэл $c<b<a$ болно. Тэгэхдээ $c,b<0,\ 0<a$. ε-нь $(0.,\varepsilon_l)$ интервал дээр утгатай тул y-ийн $y\le-\xi$ муж тодорхойлолтын мужид багтахгүй. $(-\xi,b)$-интервал дээр $\varphi(y)<0$ тул энэ интервал бас тодорхойлолтын мужид орохгүй. Интеграндын хувьсагч y-ийн тодорхойлогдох муж нь $[b,a]$ сегмент юм.

2-р зураг. 3-р зэргийн олон гишүүнтийн сул гишүүн эерэг, ахмад гишүүний коэффициент сөрөг, бас $y=-\xi<0$ цэг дээрх утга сөрөг тул $\varphi(y)=0$ тэгшитгэл гурван бодит язгууртай. Язгууруудыг өсөх дараалаар нь c,b,a гэж тэмдэглэвэл $c<b<a$. Тэгэхдээ $c,b<0,\ 0<a$.

Интеграндын хүртвэр

$$\frac{\varepsilon}{2}-e^2(\varepsilon,\beta,cnst_2(\xi,\varepsilon_1,\beta))$$

-ийг авч үзье. Энэ илэрхийлэлд $\varepsilon=\xi+y$ орлуулга хийхэд y-үржигдэхүүн гарч ирнэ.



Зураг 2. $\varphi(y)$-функцийн бүдүүвч зураг

$$\frac{\varepsilon}{2}-e^2(\varepsilon,\beta,cnst_2(\xi,\varepsilon_1,\beta))=y(1+\frac{B_1}{\varepsilon}+\frac{B_2}{2\beta^2-\varepsilon})$$

$$B_1=\frac{(3\beta^2-\xi)\xi}{2\beta^2},\quad B_2=\frac{(3\beta^2-\xi)(\xi+2\beta^2)-4\beta^4}{2\beta^2} \quad (8)$$

(1) интеграл нь

$$z-z_0=G(b,y)\equiv\frac{1}{\sqrt{2}}\int_b^y(1+\frac{B_1}{\varepsilon}+\frac{B_2}{2\beta^2-\varepsilon})\frac{dy}{\sqrt{(a-y)(y-b)(y-c)}},y=\varepsilon-\xi \quad (9)$$

хэлбэрт орно. Интегралын таблиц [2] -оос харахад үүнийг тусгай функцээр илэрхийлж болох ажээ:

$$z-z_0=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a-c}}\{F(\chi,p)+\frac{B_1}{(c+\xi)(b+\xi)}\left[(c-b)\Pi(\chi,p^2\frac{c+\xi}{-b-\xi},p)+(b+\xi)F(\chi,p)\right]- \quad (10)$$

$$\frac{B_2}{(c-2\beta^2+\xi)(b-2\beta^2+\xi)}[(c-b)\Pi(\chi,p^2\frac{c-2\beta^2+\xi}{-b+2\beta^2-\xi},p)+(b-2\beta^2+\xi)F(\chi,p)]\}$$

Үүнд, $F(\chi,p)$-нэгдүгээр төрлийн эллипслэг интеграл, $\Pi(\varphi,n,k)$-гуравдугаар төрлийн эллипслэг интеграл, B_1, B_2-нь (8) томъёогоор тодорхойлогдоно.

$$\chi=\arcsin\sqrt{\frac{(a-c)(\varepsilon-\xi-b)}{(a-b)(\varepsilon-\xi-c)}},\quad \lambda=\arcsin\sqrt{\frac{a-\varepsilon+\xi}{a-b}},\quad p=\sqrt{\frac{a-b}{a-c}}$$

c,b,a $(c<b<a)$ бол (7) тэгшитгэлийн язгуурууд бөгөөд β^2,ξ-ээр илэрхийлэгдэнэ. . (10)-д орж буй эллипслэг интегралууд нь $b\le y\le a$ буюу $b+\xi\le\varepsilon\le a+\xi$ мужид сингуляр цэггүй. (10) – аас урвуугаар

$$\varepsilon(z)=\xi+b+am(z-z_0),\quad 0\le z-z_0\le G(b,a) \qquad (11)$$

гэж тодорхойлж болно. Энэ функцийн аргумент z-нь $[z_0, z_0+G(b,a)]$ гэсэн мужид утга авч болохоор байгаа. Энэ функцийг $[z_0,\infty)$ мужид $2G(b,a)$ үетэй үет функц болгон үргэлжлүүлэн тодорхойлж болно. Үргэлжлүүлэхдээ $z=z_0+nG(b,a), n=1,2,..$ цэгүүд дээр түүнийг тэгш хэмтэй байлгах хэрэгтэй.

ҮЕТ БИШ ФУНКЦ

β^2 нь

$0<\beta^2<\frac{1}{4}\varepsilon_l$ байхад ξ-г $\delta<\xi<\gamma$ байхаар авбал, (12a)

эсвэл β^2 нь

$\frac{1}{4}\varepsilon_l<\beta^2<\frac{2}{3}\varepsilon_l$ байхад ξ-г $\delta<\xi<\gamma$ байхаар авбал, (12b)

эсвэл β^2 нь

$\frac{3}{3}\varepsilon_l<\beta^2<\varepsilon_l$ байхад ξ-г $\beta^2<\xi<\gamma$ байхаар авч (12c)

$cnst$ -ийг (2) томъёогоор тодорхойлбол $\varepsilon=\xi$ нь

$A^2(\varepsilon,\beta,cnst_1(\xi,\varepsilon_l,\beta))h^2(\varepsilon,\beta,cnst_1(\xi,\varepsilon_l,\beta))$

функцийн минимумийн цэг байх ёстой гэдэг нь ерөнхий шинжилгээнээс мэдэгддэг. Үүнийг бас дор тодорхой үзүүлнэ.

$\varepsilon = \xi + y$ гэж орлуулахад

$$A^2(\xi+y,\beta,cnst_1(\xi,\varepsilon_1,\beta))h^2(\xi+y,\beta,cnst_1(\xi,\varepsilon_1,\beta))-4co^2 =$$
$$=\frac{A_5y^5+A_4y^4+A_3y^3+(A_2-16co^2)y^2+(A_1+32co^2(2\beta^2-\xi))y+A_0-16co^2(2\beta^2-\xi)^2}{4(2\beta^2-\varepsilon)^2} \quad (13)$$

Энэ удаад коэффициентууд нь

$$A_5=-2,\quad A_4=-10\xi+2\varepsilon_1+3\beta^2, \quad (13а)$$

$$A_3=-14\xi^2+(4\varepsilon_1+4\beta^2)\xi+4\beta^2\varepsilon_1 \quad (13б)$$

$$A_2=-2\xi^3-(6\varepsilon_1+12\beta^2)\xi^2+(4\varepsilon_1^2+24\varepsilon_1\beta^2+8\beta^4)\xi-8\varepsilon_1^2\beta^2-8\varepsilon_1\beta^4 \quad (13в)$$

$$A_1=8\xi^4+(-16\varepsilon_1-24\beta^2)\xi^3+(8\varepsilon_1^2+48\beta^2\varepsilon_1+16\beta^4)\xi^2+(-24\varepsilon_1^2\beta^2-$$
$$-32\varepsilon_1\beta^4)\xi+16\beta^4\varepsilon_1^2 \quad (13г)$$

$$A_0=4\xi^5+(-8\varepsilon_1-20\beta^2)\xi^4+(4\varepsilon_1^2+40\beta^2\varepsilon_1+32\beta^4)\xi^3+(-64\varepsilon_1\beta^4-$$
$$-20\beta^2\varepsilon_1^2-16\beta^6)\xi^2+(32\varepsilon_1^2\beta^4+32\varepsilon_1\beta^6)\xi-16\varepsilon_1^2\beta^6 \quad (13д)$$

Одоо $4co^2$ параметрийн утгыг

$$4co^2=A^2(\xi,\beta,cnst_1(\xi,\varepsilon_1,\beta))h^2(\xi,\beta,cnst_1(\xi,\varepsilon_1,\beta))=(\varepsilon_1-\xi)^2(\xi-\beta^2) \quad (13е)$$

гэж сонгож авъя. Тэгэхэд (13)- ийн хүртвэрд сүүлчийн хоёр гишүүн тэг болж хувирна.

$$A_1+32co^2(2\beta^2-\xi)=0,\qquad A_0-16co^2(2\beta^2-\xi)^2=0$$

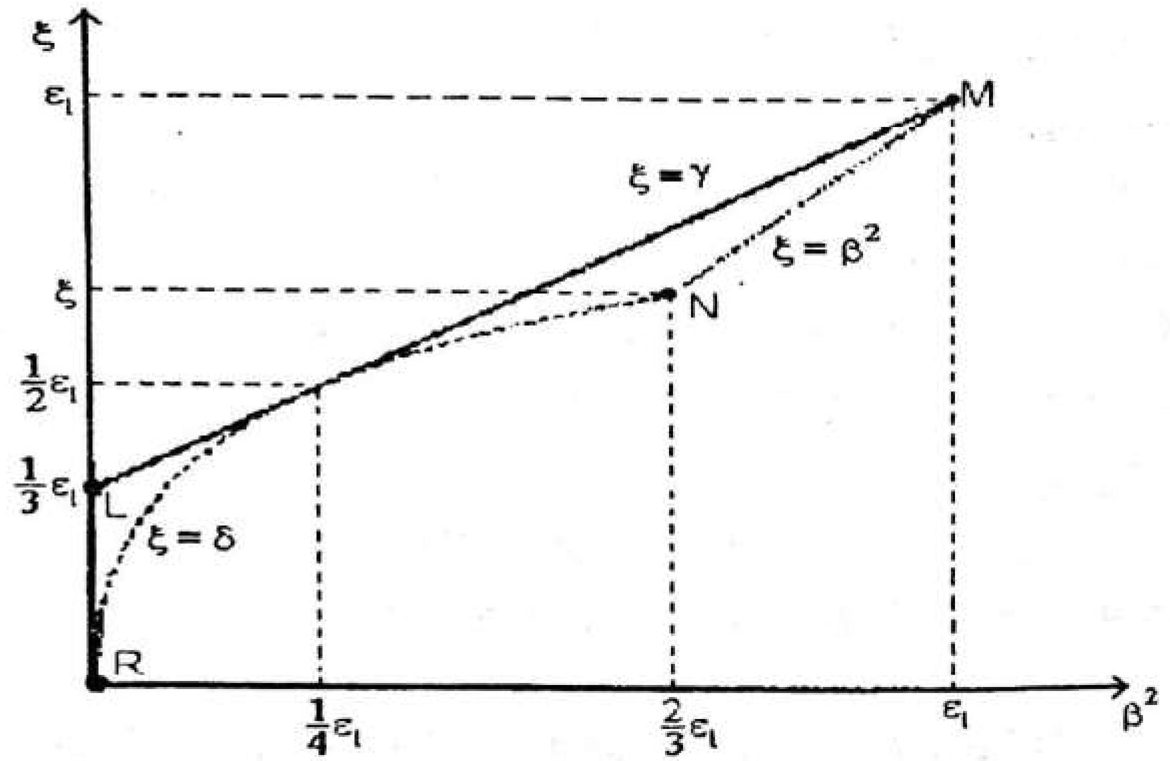
Энэ нь ξ-бол экстремумын цэг мөн гэдгийг харуулж байгаа хэрэг. Харин энэ экстремумын цэг нь миниумийн цэг юм бол

$$A_2-16co^2>0$$

гэсэн тэнцэтгэл биш биелэж байвал зохино. A_2, $4co^2$ - параметруудын утгыг (13в), (13е) томъёоноос орлуулж энэ тэнцэлбишийг дэлгэрэнгүй бичвэл

$$(8\xi-8\varepsilon_1)\beta^4+(-8\xi^2+16\varepsilon_1\xi-4\varepsilon_1^2)\beta^2+(-6\xi^3+2\varepsilon_1\xi^2)>0 \quad (14)$$

ε_l-ийг өгөгдсөн гэж бодоход β^2, ξ гэсэн хоёр параметр (4) ба (12)-д заасан хязгаарын дотор хувьсах тул тэнцэлбиш зөв эсэх нь нүдэнд шууд тусахгүй байна. Шалгая.



Зураг 3. β^2, ξ -ийн авч болох утгууд буюу (12) хязгаарлалтын зураг.

3-р зураг. (β^2, ξ) нь (12) хязгаарлалт ёсоор дөрвөн шугамаар хүрээлэгдсэн талбай дээр утга авна. Эдгээр шугамууд нь:

1). $\beta^2 < 2/3\varepsilon_l$ мужид $\xi = \delta$ (3а томъёо) муруй шугам,

2). $\beta^2 < \varepsilon_l$ мужид $\xi = \gamma$ (3б томъёо) шулуун шугам,

3). $2/3\varepsilon_l < \beta^2 < \varepsilon_l$ мужид $\xi = \beta^2$ шулуун шугам

4). $\beta^2 = 0$ шулуун шугам болно. Харин $\beta^2 = 1/4\varepsilon_l$, $\xi = 1/2\varepsilon_l$ координаттай цэг утгын талбайд хамаарахгүй.

(14) –ийн зүүн талд байгаа илэрхийлэлийг $w(\xi, \beta^2)$ гэж тэмдэглэе. Өгөгдсөн ξ-д $w(\xi, \beta^2)$ нь β^2-ийн зэргээр бол квадрат функц юм.

β^4-ийн коэффициент $8\xi - 8\varepsilon_l < 0$. Учир нь гэвэл $\xi < \varepsilon$. Иймд энэ функц доош харсан парабол дүрсэлнэ. 3-р зураг дээр дүрсийн дээд тал LM $(\beta^2 = (3\xi - \varepsilon_l)/2)$ дээр, мөн доод талын RN хэсэг $(\beta^2 = \xi^2/(2\varepsilon_l - 2\xi))$ дээр $w(\xi, \beta^2) \equiv 0$. Цаашилбал, NM хэсэг $(\beta^2 = \xi)$ дээр, RL хэсэг $(\beta^2 = 0)$ дээр $w(\xi, \beta^2)$ функц сөрөг утга авахгүй: $w(\xi, \beta^2) \geq 0$. Иймд өгөгдсөн ξ-д β^2 ээс хамаарах хамаарлаараа доош харсан парабол дүрслэх $w(\xi, \beta^2)$ функц өгөгдсөн ξ-д зураг дээр аль ч 1 ба 2 цэгийг холбосон хэрчмийн аль ч цэг дээр эерэг утгатай байж таарна. Иймхүү (14) тэнцэтгэл биш зөв байна.

Интеграндын тодорхойлогдох мужийг тогтоох асуудал авч үзье. (13)-ийн хүртвэрийг $y^2\psi(y)$ гэж бичвэл

$$\psi(y) = -2y^3 + A_4 y^2 + A_3 y + A_2 - 16co$$

Энэ 3-р зэргийн олон гишүүнтийн коэффициентууд (13а),(13б),(13в),(13е) ёсоор β^2, ξ ээс хамаарна Энэ функцийн бүдүүвч 3-р зурагт үзүүлсэнтэй адилхан. Энэ функц $y = 0$ дээр эерэг утгатай, $\varepsilon = 0$ буюу $y = -\xi$ дээр сөрөг утгатай(хавсралтын 2.) тул

$$\psi(y) = 0 \qquad (15)$$

тэгшитгэл гурван бодит язгууртай. Язгууруудыг өсөх дараалаар нь c, b, a гэж тэмдэглэвэл $c < b < a$, тэгэхдээ $c, b < 0,\ 0 < a$. ξ-нь $0 < \xi < \varepsilon_l$ интервал дээр утгатай тул y-ийн $y \leq -\xi$ муж тодорхойлолтын мужид багтахгүй. $(-\xi, b)$-интервал дээр $\psi(y) < 0$ тул энэ интервал тодорхойлолтын мужид орохгүй. интеграндын хувьсагч y-ийн тодорхойлогдох муж нь $[b, a]$ сегмент юм.

Интеграндыг дараахь хэлбэрт оруулж болно

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\frac{B_1}{2\beta^2-\varepsilon}+\frac{B_2}{\varepsilon}+\frac{B_3}{\varepsilon-\xi})\frac{1}{\sqrt{(a-y)(y-b)(y-c)}}$$

Энэ удаад

$$B_1=\frac{3}{2}\xi+\beta^2-\varepsilon_1,\quad B_2=-\varepsilon_1-2\beta^2+\frac{3}{2}\xi+2\frac{\varepsilon_1\beta^2}{\xi},\quad B_3=\xi+2\beta^2-2\frac{\varepsilon_1\beta^2}{\xi} \qquad (!6)$$

Интеграндын тодорхойлолтын муж дотор $y=0$ буюу $\varepsilon=\xi$ цэг дээр полюс бий тул интегралыг полюсийн баруун ба зүүн мужид тус тусад нь авах хэрэг гарна.

Зүүн мужид, интегралын доод хязгаарыг b ,дээд хязгаарыг $y(b\le y<0)$ гэж тавин y-ээр интеграл авахад

$$z-z_0=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a-c}}\{\frac{B_2}{(c+\xi)(b+\xi)}[(c-b)\Pi(\chi,p^2\frac{c+\xi}{-b-\xi},p)+(b+\xi)F(\chi,p)]+$$
$$+\frac{B_1}{c-2\beta^2+\xi}\frac{1}{b-2\beta^2+\xi}[(c-b)\Pi(\chi,p^2\frac{c-2\beta^2+\xi}{-b+2\beta^2-\xi},p)+(b-2\beta^2+\xi)F(\chi,p)]- \qquad (17)$$
$$-\frac{B_3}{cb}[(c-b)\Pi(\chi,p^2\frac{c}{-b},p)+bF(\chi,p)]-F(\chi,p)\}$$

c,b,a бол (15) тэгшитгэлийн x дараалаар журамлагдсан язгуурууд бөгөөд ξ,β -ээр илэрхийлэгдэнэ. B_1,B_2,B_3-нь (16) томъёогоор тодорхойлогдоно. Бусад тэмдэглэл нь (10)-р томъёоныхтой адил. Энэ илэрхийлэлийг $\xi+b\le\varepsilon<\xi$ мужид хэрэглэнэ (17)-оос урвуугаар

$$\varepsilon(z)=\xi+b+am(z-z_0),$$

Баруун мужид интегралын доод хязгаарыг $y(0<y\le a)$, дээд хязгаарыг a гэж тавин y-ээр интеграл авахад

$$z-z_0=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a-c}}\{F(\lambda,p)+\frac{-B_1}{(a-2\beta^2+\xi)}\Pi(\lambda,\frac{a-b}{-a+2\beta^2-\xi},p)+\frac{B_2}{a+\xi}\Pi(\lambda,\frac{a-b}{-a-\xi},p)+ \qquad (18)$$
$$+\frac{B_3}{a}\Pi(\lambda,\frac{a-b}{-a},p)\}$$

Энэ илэрхийллийг $\xi\le\varepsilon<\xi+a$ мужид хэрэглэнэ. (18)-аас урвуугаар

$$\varepsilon(z) = \xi + a + am(z - z_0),$$

гэж болно. Энэ $\varepsilon(z - z_0)$ функцийн $\varepsilon \to \xi$ үеийн асимптотыг бичвэл

$$\varepsilon - \xi = (\varepsilon_0 - \xi)\exp(-(z - z_0)\frac{\sqrt{2abc}}{B_3})$$

Хэрвээ $\varepsilon \to \xi - 0$ бол $b + \xi < \varepsilon_0 < \xi$. Хэрвээ $\varepsilon \to \xi + 0$ бол $\xi < \varepsilon_0 < \xi + a$.

ХАВСРАЛТ

1, $\varphi(-\xi) < 0$ тэнцэтгэл бишийн баталгаа. $\varphi(-\xi)$-ийн илэрхийллийг дараах хэлбэртэй бичиж болно.

$$\varphi(-\xi) = \frac{\xi}{\beta^2}\tilde{\varphi}(\beta^2, \xi), \quad \tilde{\varphi}(\beta^2, \xi) = -\xi^3 + 6\xi^2\beta^2 + (3\xi - 8\varepsilon_l)\beta^4$$

$0 < \xi$ тул $\widetilde{\varphi}(\beta^2, \xi) < 0$ гэж батлах хэрэгтэй. Өгөгдсөн ξ-д $\widetilde{\varphi}(\beta^2, \xi)$ нь β^2 аараа 2-р зэргийн олон гишүүнт. Ахлах гишүүний коэффициент сөрөг : $3\xi - 8\varepsilon_l < 0$. Учир нь (4) хязгаарлалт ёсоор $0 < \xi < 2/3\varepsilon_l$. Өгөгдсөн ξ-д $\widetilde{\varphi}(\beta^2, \xi)$ нь доош харсан парабол дүрсэлнэ. 1-р зурагт өгөгдсөн ξ-д (β^2, ξ) мужийн $\xi = 2\beta^2$ тэгшитгэлээр дүрсэлсэн хүрээний L цэг $(\beta^2 = \xi/2)$ дээр

$\widetilde{\varphi}(\beta^2, \xi) = \frac{\xi^2}{4}(11\xi - 8\varepsilon_l) < 0$. Учир нь (4) ёсоор $\xi < \frac{2}{3}\varepsilon_l$.

өгөгдсөн ξ-д (β^2, ξ) мужийн $\xi = \delta$ тэгшитгэлээр дүрсэлсэн хүрээний M цэг $(\beta^2 = \xi^2/(2\varepsilon_l - 2\xi))$ дээр

$$\widetilde{\varphi}(\beta^2, \xi) = -\frac{\xi^3}{(2\varepsilon_l - 2\xi)^2}(\xi^2 + (4\xi - 2\varepsilon_l)^2) < 0$$

L, M цэгүүд дээр β^2 аар авсан уламжлалууд сөрөг:

$$\widetilde{\varphi}'(L,\xi)=\xi(9\xi-8\varepsilon_l)<0, \quad \widetilde{\varphi}'(M,\xi)=-\xi^2\frac{3\xi+2\varepsilon_l}{\varepsilon_l-\xi}<0,$$

Учир нь (4) ёсоор $\xi<\frac{2}{3}\varepsilon_l$. Иймд зурагт, өгөгдсөн ξ-д L,M цэгүүдийг холбосон хэрчмийн аль ч цэгт $\widetilde{\varphi}(\beta^2,\xi)<0$ байж таарна.

2. $\psi(-\xi)<0$ тэнцэлбишийн баталгаа. $\psi(-\xi)$-ийн илэрхийллийг дараах хэлбэртэй бичиж болно.

$$\psi(-\xi)=\beta^2((8\xi-8\varepsilon_l)\beta^2-(3\xi-2\varepsilon_l)^2)$$

$\xi<\varepsilon_l$ учраас энэ илэрхийлэл илэрхий сөрөг утгатай.

Резюме

Для зависимости диэлектрической функции от координаты в задаче распространения световых ТМ волн в дефокусирующей керр среде давно получено автором этой статьи формальное интегральное выражение, содержащее четыре параметры, которое до сих пор не удалось выразить через известные функции. В настоящей работе при произвольном фиксированном значении диэлектрической постоянной, в некоторой области значений константа рефракции, в одномерном много-образе значений оставщихся двух параметров интеграл брался в виде линейной комбинации эллиптических интегралов первого и третьего родов.

ИШЛЭЛ

1. Г.Очирбат, О.Нямсүрэн, Рассеяние света в дефокусирующей среде на линейной подложке. Анализ формального решения, 2000, Препринт ОИЯИ, Р17-2000-241, Дубна.
2. И. С. Градштейн и И. М. Рыжик, Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений, 1963, ФМ, Москва.