МУИС, Эрдэм Шинжилгээний Бичиг. ФИЗИК №282(14), 2006, хууд. 74-79

Өөрөө цуглуулагч керр орчин дахь гэрлийн стационар тм долгионы диэлектрикийн функц тусгай функцээр илэрхийлэгдэх тохиол

О.Нямсүрэн, Г. Очирбат

МУИС, ФЭС, ОТФТэнхим

[1] өгүүлэлд өөрөө цуглуулагч керр орчин дахь гэрлийн стационар тм долгионы оронд диэлектрикийн функц параметруудаас хамаарах хамаарлыг нягтлан судалсан дүнг тайлагнан бичсэн билээ. Судалгааны явцад

$$z(\varepsilon) = z_0 + \int_b^{\varepsilon} \frac{\varepsilon + 2e^2(\varepsilon, \varepsilon_l, \beta, cnst)}{2(2\beta^2 - \varepsilon)\sqrt{F(\varepsilon, \varepsilon_l, \beta, cnst) - 4co^2}} d\varepsilon, \qquad (1)$$

интеграл тусгай ба элементар функцээр илэрхийлэгдэх параметруудын муж бий гэдэг нь тодорхой болсон. Энэ өгүүлэлд уг интеграл тусгай ба элементар функцээр илэрхийлэгдэх параметруудын мужийг хэрхэн олсноо,бас интегралыг хэрхэн авснаа тоймлуулж эцсийн томъёонууд бичье гэж шийдсэн болно. Энэ өгүүлэл бол чухамдаа [1] өгүүллийн үргэлжлэл тул сонирхсон хүн эхлээд [1] -тэй танилцана уу.

β^2 **параметрийн**

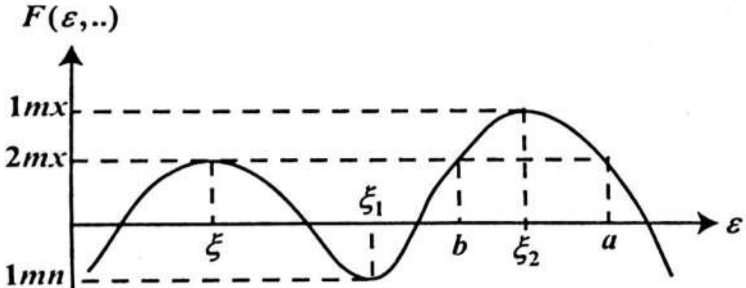
$$\frac{8}{9}\varepsilon_l < \beta^2$$

нөхцөл хангах утга бүрд $\beta^2 cnst$ параметрийн зохих мужид интеграл авагддаг. Энэ талаар дор тодорхой өгүүлсүгэй.

$F(\varepsilon,..) = F(\varepsilon, \varepsilon_l, \beta, cnst_2(\xi, \varepsilon_l, \beta))$ функцийн бүдүүвч графикийн нэгэн хэсэг.

$F(\varepsilon,..)$ бол хоёр полюстай, ерөнхийдээ таван min,max бүхий функц мөн.

***1 зурагд $\frac{8}{9}\varepsilon_l < \beta^2$ тохиолд $\varepsilon = 0$, $\varepsilon = 2\beta^2$*-хоёр полюсийн хоорондох хэсэг дүрслэгджээ.**



1 зураг. $\frac{8}{9}\varepsilon_l < \beta^2$ тохиол. $\varepsilon = \xi$ бол хоёр дугаар торлийн максимумын цэг. $\varepsilon = \xi_1$ бол нэгдүгээр торлийн миниумын цэг. $\varepsilon = \xi_2$ бол 1-р торлийн максимумын цэг.. 2-р торлийн максимумын $\varepsilon = \xi$ цэг дээрх $F(\varepsilon,..)$ функцийн утгыг $2mx$ - ээр, нэгдүгээр торлийн миниум,максимумын цэг ξ_1, ξ_2 дээрх $F(\varepsilon,..)$ функцийн утгуудыг $1mn$, $1mx$ гэж тэмдэглээжээ.

Зурагт

$$0 \le 2mx < 1mx \qquad (2)$$

тохиол дүрслэгджээ.

$$2mx = F(\xi, \varepsilon_l, \beta, cnst_2(\xi, \varepsilon_l, \beta)) = (2\varepsilon_l - 3\xi_l)\xi^3 / 4\beta^2 \qquad (3)$$

$$1mn = F(\xi_1, \varepsilon_l, \beta, cnst_2(\xi, \varepsilon_l, \beta)) = (\xi_1 - \beta^2)(\xi_1 - \varepsilon_l)^2 \quad (4)$$

$$1mx = F(\xi_2, \varepsilon_l, \beta, cnst_2(\xi, \varepsilon_l, \beta)) = (\xi_2 - \beta^2)(\xi_2 - \varepsilon_l)^2 \quad (5)$$

Хэрвээ ξ-ийн аль нэг утгад ,зурагт үзүүлсэн шиг, (2) нохцол бүрдсэн тохиолд $4co^2$-параметрийн утгыг $2mx$-тэй тэнцүүгээр авах юм бол (1) интегралын интеграндад хуваарьт язгуур дор $\varepsilon = \xi$ цэг дээр хоёр дугаар эрэмбийн тэг үүсч $[b, a]$- Ah-муж дээр интеграл авагдах боломж бий болно.

$\beta^2 > \frac{8}{9}\varepsilon_l$ нохцолд β^2-ийн огогдсон утга бүрт (2) тэнцэл биш биелдэг ξ параметрийн бүхэл муж бий.

Интеграл авагдах ξ муж

(2) нохцол биелэх ξ - ийн утгуудыг олж тогтоох зорилт тавья.

2-р торлийн максимумын цэг ξ ийн утгыг огоход түүнд харгалзах $cnst$ -ийн утга тодорхой болно.

$$cnst = cnst_2(\xi, \varepsilon_l, \beta) = -\varepsilon_l^2 + 3\xi^2 - (1/\beta^2)\xi^3 \quad (6)$$

$cnst$ - ийн энэхүү утгад харгалзах 1-р торлийн минимум максимумын цэгүүд

$$\xi_1 = \frac{2\beta^2 + \varepsilon_l}{3} - \sqrt{\frac{1}{3}cnst_2(\xi, \varepsilon_l, \beta) + \frac{4}{9}(\varepsilon_l - \beta^2)^2} \quad (7)$$

$$\xi_2 = \frac{2\beta^2 + \varepsilon_l}{3} + \sqrt{\frac{1}{3}cnst_2(\xi, \varepsilon_l, \beta) + \frac{4}{9}(\varepsilon_l - \beta^2)^2} \quad (8)$$

2-р торлийн максимумын өндөр:

$$2mx(\xi) \equiv F(\xi, \varepsilon_l, \beta, cnst_2(\xi, \varepsilon_l, \beta)) = (2\varepsilon_l - 3\xi)\xi^3 / 4\beta^2 \quad (9)$$

1-р торлийн максимумын өндөр:

$$1mx(\xi) = F(\xi_2, \varepsilon_l, \beta, cnst_2(\xi, \varepsilon_l, \beta)) = (\xi_2 - \beta^2)(\xi_2 - \varepsilon_l)^2 \quad (10)$$

Үүнд ξ_2 нь ,(8) томъёо ёсоор, ξ -ээс хамаарна.
Энэ хоёр илэрхийллийг ашиглан

$$0 \le 2mx(\xi) < 1mx(\xi) \quad (11)$$

тэнцэл бишийг β^2-ийн огогдсон утга бүрд ξ- ийн утгаас хамааруулан шинжилж зохох юмгүй.

$$2mx(\xi) = 1mx(\xi) \quad (12)$$

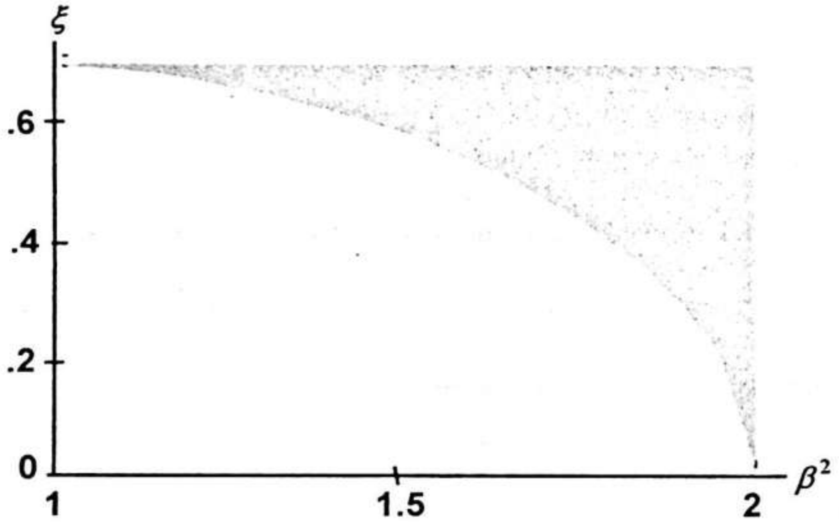
тэгшитгэлийн язгуурыг ξ_e-ээр тэмдэглэе. ξ_e нь β^2-ийн утгаар тодорхойлогдох тул ,хэрэгтэй газар, тодотгож $\xi_e(\beta^2)$ гэж бичих нь зүйтэй юм. $\frac{8}{9}\varepsilon_l < \beta^2 < 2\varepsilon_l$ нохцол хангах β^2- ийн огогдсон утгад $\xi \in (\xi_e(\beta^2), \frac{2}{3}\varepsilon_l]$ бүрд (11) тэнцэлбус биелнэ. ξ_e-г ,жишээ нь, mathcad програм хэрэглэж байгаа бол язгуур олдог функц дуудаж

$$\xi = \frac{2}{3}\varepsilon_l, \quad (guess\ value)$$
$$\xi_e = root(1mx(\xi) - 2mx(\xi), \xi) \tag{13}$$

гэж олж болно. ξ_e-г олох өөр нэг аргыг хавсралтаас үзнэ үү.

β^2-ийн утга $[\varepsilon_l, 2\varepsilon_l)$ муж дээр байхад интеграл авагдах ξ- ийн утгын мужийг 2-р графикт үзүүлэв.

Хэрвээ $\beta^2 \geq 2\varepsilon_l$ бол $\xi \in (0, \frac{2}{3}\varepsilon_l]$ бүрд интеграл авагдана.



2–р график. $\varepsilon_l = 1$.
ξ бол 2-р максиум --ын цэг. Сүүдэртүүл -сэн талбайн цэг бүр дээр (1) интеграл тусгай функцээр илэрхийлэг дэнэ.Энд ξ-ийн утга дээрээсээ $\frac{2}{3}\varepsilon_l$-ээр хязгаарлагдсан байна. Муруй шугаман гурвалжны муруй гипотенуз нь $\xi = \xi_e(\beta^2)$- муруй мон. Энэ муруйн *цэг бүр дээр* $0 \leq 2mx(\xi) = 1mx(\xi)$. *Эдгээр цэг бүр нь хавтгай долгионд харгалзана.*

Интеграл хэрхэн авсан бэ гэвэл.

Орлуулга:

$\varepsilon = \xi + x$, ξ нь 2-р торлийн максимумын цэг байг. Тэхэд

$$F(\varepsilon, \varepsilon_l, \beta, cnst_2(\xi, \varepsilon_l, \beta)) = \frac{хуртвэр}{4(2\beta^2 - \varepsilon)^2} \tag{14}$$

$$хуртвэр = x^2(A_2 + A_3x + A_4x^2 + A_5x^3) = x^2\varphi(x), \tag{15}$$

$$\varphi(x) = A_2 + A_3x + A_4x^2 + A_5x^3 \tag{16}$$

Үүнд

$$A_2 = -\frac{3}{\beta^2}\xi^4 + (12\beta^2 + 6\varepsilon_l)\xi^2 - 12\xi\varepsilon_l\beta^2$$

$$A_3 = -\frac{2}{\beta^2}\xi^3 - 14\xi^2 + (8\varepsilon_l + 12\beta^2)\xi - 4\varepsilon_l\beta^2$$

$$A_4 = -10\xi + 2\varepsilon_l + 3\beta^2$$

$$A_5 = -2$$

$$\frac{\varepsilon}{2} + e^2(\varepsilon, \varepsilon_l, \beta, cnst(\xi, \varepsilon_l, \beta)) = \frac{1}{2}x(1 + \frac{B_1}{\varepsilon} + \frac{B_2}{2\beta^2 - \varepsilon}) \tag{17}$$

Үүнд

$$B_1 = \frac{(3\beta^2 - \xi)\xi}{2\beta^2}, \quad B_2 = \frac{(3\beta^2 - \xi)(\xi + 2\beta^2) - 4\beta^2}{2\beta^2} \qquad (17)''$$

β^2-ийн $[\varepsilon_l, 2\varepsilon_l)$ муж дээрх утга бүрд $\xi \in [\varepsilon_e(\beta^2), \frac{2}{3}\varepsilon_l]$ байхад,эсвэл β^2-ийн $\beta^2 \geq 2\varepsilon_l$ муж дээрх утга бүрд $\xi \in [0, \frac{2}{3}\varepsilon_l]$ байхад (1) интеграл

$$z - z_0 = G(b,x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\int_b^x (1 + \frac{B_1}{\varepsilon} + \frac{B_2}{2\beta^2 - \varepsilon})\frac{1}{\sqrt{(a-x)(x-b)(x-c)}}dx, \quad x = \varepsilon - \xi \quad (18)$$

хэлбэрт орно. Үүнд a, b, c бол $\varphi(x)$ (16-р томъёо) куб доровон гишүүнтийн дараалсан гурван язгуурууд, $c < b < a$. Утгуудын хавсралтын эцэст бичсэн байгаа($(\otimes)$ -томъёо).

Интегралын таблиц [2] -оос харахад үүнийг тусгай функцээр илэрхийлж болох ажээ:

$$\begin{aligned} z - z_0 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a-c}}\{ &\frac{B_1}{(c+\xi)(b+\xi)}[(c-b)\Pi(\chi, p^2\frac{c+\xi}{-b-\xi}, p) + (b+\xi)F(\chi,p)] - \\ -&\frac{B_2}{(c-2\beta^2+\xi)(b-2\beta^2+\xi)}[(c-b)\Pi(\chi, p^2\frac{c-2\beta^2+\xi}{-b+2\beta^2-\xi}, p) + \\ +&(b-2\beta^2+\xi)F(\chi,p)] + F(\chi,p)\} \end{aligned} \qquad (19)$$

Үүнд, $F(\chi, p)$-нэгдүгээр төрлийн эллипслэг интеграл, $\Pi(\varphi, n, k)$-гуравдугаар төрлийн эллипслэг интеграл, B_1, B_2-нь (17)" томъёогоор тодорхойлогдоно.

$$\chi = \arcsin\sqrt{\frac{(a-c)(\varepsilon - \xi - b)}{(a-b)(\varepsilon - \xi - c)}}, \quad \lambda = \arcsin\sqrt{\frac{a - \varepsilon + \xi}{a-b}}, \quad p = \sqrt{\frac{a-b}{a-c}} \qquad (20)$$

(19)-д орж буй эллипслэг интегралууд нь $b \leq x \leq a$ буюу $b + \xi \leq \varepsilon \leq a + \xi$ мужид сингуляр цэггүй. (19) –аас урвуугаар

$$\varepsilon(z) = \xi + b + am(z - z_0), \quad 0 \leq z - z_0 \leq G(b,a) \qquad (21)$$

гэж тодорхойлж болно. Энэ функцийн аргумент z-нь $[z_0, z_0 + G(b,a)]$ гэсэн мужид утга авч болохоор байгаа. Энэ функцийг $[z_0, \infty)$ мужид $2G(b,a)$ үетэй үет функц болгон үргэлжлүүлэн тодорхойлж болно. Үргэлжлүүлэхдээ $z = z_0 + nG(b,a)$, $n = 1, 2, ..$ цэгүүд дээр түүнийг тэгш хэмтэй байлгах хэрэгтэй.

Резюме

Для зависимости диэлектрической функции от координаты в задаче распространения световых ТМ волн в самофокусирующей керр среде давно получено, автором этой статьи, формальное интегральное выражение, содержащее четыре параметры, которое до сих пор не удалось выразить через известные функции. В настоящей работе при произвольном фиксированном значении диэлектрической постоянной, в некоторой области значений константа рефракции, в одномерном много-образе значений оставщихся двух параметров интеграл брался в виде линейной комбинации эллиптических интегралов первого и третьего родов.

Ссылки

[1]. Г. Очирбат, О. Нямсүрэн, Өөрөө цуглуулагч керр орчин дахь гэрлийн стационар тм долгионы оронд диэлектрикийн функц параметруудаас хамаарах нь. ЭШБ-ийн энэ дугаарт.

[2]. И. С. Градштейн и И. М. Рыжик, Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений, 1963, ФМ, Москва.

ХАВСРАЛТ

I. $\frac{8}{9}\varepsilon_l < \beta^2 < 2\varepsilon_l$

Нэгдүгээр ба хоёрдугаар торлийн максимумын өндөр хоорондоо тэнцэх

ξ-ийн утга ξ_e-г mathcad : $\xi = \frac{2}{3}\varepsilon_l$, $(guess\ value)$

$$\xi_e = root(1mx(\xi) - 2mx(\xi), \xi) \qquad \text{(X1)}$$

гэж олж болно.

$2mx(\xi) = 1mx(\xi)$ тохиолд, нөгөө талаас, $\varphi(x)$-куб илэрхийллийн хоёр язгуур давхцах ёстой тул $\xi = \xi_e$-д $\varphi(x) = 0$ тэгшитгэлийн дискриминант тэг болж таараа.

Тэмдэглэл:

$$ck(\xi) = -0.5(-\frac{3}{\beta^2}\xi^4 + (12\beta^2 + 6\varepsilon_l)\xi^2 - 12\xi\varepsilon_l\beta^2)$$

$$bk(\xi) = -0.5(-\frac{2}{\beta^2}\xi^3 - 14\xi^2 + (8\varepsilon_l + 12\beta^2)\xi - 4\varepsilon_l\beta^2)$$

$$ak(\xi) = -0.5(-10\xi + 2\varepsilon_l + 3\beta^2)$$

$$p(\xi) = -\frac{ak(\xi)}{3} + bk(\xi), \quad q(\xi) = \frac{ak(\xi)}{3}^{3} - ak(\xi)\frac{bk(\xi)}{3} + c(\xi)$$

$$s(\xi) = a\cos\frac{-q(\xi)}{2\sqrt{-(p(\xi)/3)^3}},$$

дискриминант : $Q(\xi) = \frac{p(\xi)}{3}^{3} + \frac{q(\xi)}{2}^{2}$

mathcad: $\xi = \frac{2}{3}\varepsilon_l$, $(guess\ value)$

$$\xi_e = root(Q(\xi), \xi) \qquad \text{(X2)}$$

$\xi \in (\xi_e, \frac{2}{3}\varepsilon_l]$ бүрд $\varphi(x)$-ийн язгуурууд:

$$x1(\xi) = \frac{-ak(\xi)}{3} - 2\sqrt{-p(\xi)/3}\cos(\frac{s(\xi)}{3} - \frac{\pi}{3}) \qquad \text{(X3)}$$

$$x2(\xi) = \frac{-ak(\xi)}{3} - 2\sqrt{-p(\xi)/3}\cos(\frac{s(\xi)}{3} + \frac{\pi}{3}) \qquad \text{(X4)}$$

$$x3(\xi) = \frac{ak(\xi)}{3} + 2\sqrt{-p(\xi)/3}\cos(\frac{s(\xi)}{3}) \qquad \text{(X5)}$$

Тэхдээ

$$b = x2(\xi), \quad a = x3(\xi) \qquad \text{((X6))}$$

II. $2\varepsilon_l \le \beta^2$

$\xi \in [0, \frac{2}{3}\varepsilon_l]$ бүрд (x3)-(x6) томъёонуудыг хэрэглэнэ.