К ВОПРОСУ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПОЛНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА ДЛЯ СВЕТОВЫХ ВОЛН ОБЩЕЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ ПЛЕНКЕ.

Г. ОЧИРБАТ О. НЯМСУРЭН
[1]МУИС, Физик-Электроникийн сургууль
[2]Газар Холдинг компани

Ключевые слова: *Нелинейная Среда, Световая Волна, Анизотропность, Рассеяние, Волна Брюстера, Плоская Структура*

Товч утга: Керр шугаман бус диэлектрик илтэс доті тарах гэрлийн долгионы бодлогод Максвеллийн бүр систем тэгшитгэлийг интегралчлах нэгэн арга толилуул буй. Уг арга зохиогчийн олсон, нэг туслах фун тодорхойлох хоёрдугаар эрэмбийн дифференциал тэгшитгэл бодоход тулгуурлана.

Насколько нам известно,проблема решения зада распространения электро-магнитных волн общей поляризации нелинейной диэлетрической плёнке вовсе не обсуждалась в литерату Это связано, повидимому, во первых, с трудностью рассмотрен системы довольно многих, по крайной мере четырех, нелинейн дифференциальных уравнений, и во вторых, даже в том случае, ес удастся свести задачу к квадратуре, его анализ был очень нелегким и за множества свободных параметров и сложности математическ структуры конечного квадратурного выражения. Тем неменее м предлагаем к вниманию тех, кто может интересоваться подобны вопросом , наш вариант схемы решения проблемы.

Как известно, система уравнений Максвелла для изотропн среды допускает редуицирование в двух специальных частных случая Эти, так называемые , ТМ и ТЕ волны поддаются к детальному разбо в ряде типов нелинейности [1-4]. Однако, в общем случае поляризаци эти волны между собой переплетаются сложным образом и в результа описываются только полной системой нелинейных уравнен электромагнитного поля.

Волну, распространяющуюся в диэлектрической пленк представим в виде

$$\mathbf{E}(x,y,z)=\mathbf{e}(z)\exp\left(-i\omega t+ik_0\beta x\right)+k.c,$$

$$\mathbf{H}(x,y,z)=\mathbf{h}(z)\exp\left(-i\omega t+ik_0\beta x\right)+k.c.$$

Здесь k_0-модуль волнового вектора, соответствующий вакууму,

β-постоянная рефракции, ω-круговая частота.

Свет падает из накладки (z< 0), на поверхность плёнки (z= 0) . Волна, бегущая вдоль x-направления может иметь сложную пространственную структуру вдоль z-направления.

Дальше, для краткости, используется обозначение

$c\mu_0\mathbf{h}\rightarrow\mathbf{h}$.

Диэлектрическая функция изотропной средыКерра

$$\in=\varepsilon+\left|\mathbf{e}\right|^2. \qquad (1)$$

где ε-диэлектрическая константа. Здесь α -постаянная Керра отсутствует из-за замены

$\sqrt{\alpha}\,\mathbf{e}\rightarrow\mathbf{e},\ \sqrt{\alpha}\,\mathbf{h}\rightarrow\mathbf{h}$.

Вследствие этой замены в исходных уравнениях эта постоянная также не будет.

Для компонент электромагнитных волн мы ввели следующие обозначения :

Пологаются, что A > 0, E > 0, h < 0, H> 0 , e > 0 в случае фокусирующих сред.

$$e_x=iA\exp(i\phi_A),\ e_z=E\exp(i\phi_E),\ h_y=h\exp(i\phi_E). \quad (2.1)$$

$$e_y=e\exp(i\phi_e),\ h_x=iH\exp(i\phi_H),\ h_z=\left|h_z\right|\exp(i\phi_e). \quad (2.2)$$

Необходимо отметить что здесь E обозначает не модуль вектора e, а амплитуду e_z-компонента этого комплексного вектора ; аналогично h есть амплитуда h_y-компонента, а не модуль вектора h .

В уравнениях выступают следующие фазовые разности :

$$\Delta\phi=\phi_E-\phi_A,\ \Delta\phi'=\phi_e-\phi_H,$$

которые входят в законах сохранения потоков :

$$\frac{1}{2}hA\sin(\Delta\phi) = co_1, \qquad (4,1)$$

$$\frac{1}{2}eH\sin(\Delta\phi') = co_2, \qquad 4,2)$$

где co_1, co_2 -константы, представляющие собой величины потоков.

Уравнения Максвелла в наших обозначениях :

$$\frac{dA^2}{dz} = \frac{2(\in - \beta^2)}{\in} Ah\cos(\Delta\phi), \quad (5,1a)$$

$$\frac{dh^2}{dz} = -2\in Ah\cos(\Delta\phi), \quad (5,1b)$$

$$\frac{de^2}{dz} = 2eH\cos(\Delta\phi'), \quad (5,2a)$$

$$\frac{dH^2}{dz} = 2(\beta^2 - \in) \; eH\cos(\Delta\phi') \quad (5,2b)$$

Здесь через z обозначают безразмерную z- координату : $k_0 z$.

Из этих уравнений с учетом (4,1) и (4,2) получено уравнение эволюции величины $\in$ по z

$$\frac{d\in}{dz} = \frac{2\in^3}{\in^3 + 2\beta^2 h^2}\left[\frac{\in - 2\beta^2}{\in}\sqrt{A^2h^2 - 4c_{01}{}^2} + \sqrt{H^2e^2 - 4c_{02}{}^2}\right], \qquad (6)$$

которое разделением переменных приводится к квадратуре в том случае, если найдены зависимости величин A^2, h^2, H^2, и e^2 от $\in$. Пологая, что A^2, h^2, H^2, и e^2 являются функциями от $\in$ перепишем уравнения (5,1a), (5,1b), (5,2a), и (5,2b) в виде

$$\frac{dA^2}{d\in} = \frac{2(\in - \beta^2)}{\in}\frac{\sqrt{A^2h^2 - 4c_{01}{}^2}}{F}, \quad (7,1a)$$

$$\frac{dh^2}{d\in} = -2\in\frac{\sqrt{A^2h^2 - 4c_{01}{}^2}}{F}, \quad (7,1b)$$

$$\frac{de^2}{d\in} = 2\,\frac{\sqrt{e^2H^2 - 4c_{02}^{\ 2}}}{F}, \qquad (7,2a)$$

$$\frac{dH^2}{d\in} = 2(\beta^2 - \in)\frac{\sqrt{e^2H^2 - 4c_{02}^{\ 2}}}{F}. \qquad (7,2b)$$

где

$$F = \frac{2\in^3}{\in^3 + 2\beta^2 h^2}\left[\frac{\in - 2\beta^2}{\in}\sqrt{A^2h^2 - 4c_{01}^{\ 2}} + \sqrt{H^2e^2 - 4c_{02}^{\ 2}}\right].$$

Из (7,1a), (7,1b), (7,2a), и (7,2b) находим, что

$$\frac{dA^2}{d\in} = -\frac{\left(\in - \beta^2\right)}{\in^2}\frac{dh^2}{d\in}. \qquad (8)$$

$$\frac{dH^2}{d\in} = \left(\beta^2 - \in\right)\frac{de^2}{d\in}. \qquad (9)$$

Теперь введем две вспомогательные функции по формулам

$$Q = A^2 + \frac{\in - \beta^2}{\in^2}h^2, \qquad (10)$$

$$q = H^2 + \left(\in - \beta^2\right)\in^2. \qquad (11)$$

Тогда с помощью этих функций исходные функции A^2, h^2, e^2, и H^2 выражаются следующим образом

$$A^2 = Q - \frac{(\in - \beta^2)\in}{2\beta^2 - \in}\dot{Q}, \qquad (12,1a)$$

$$h^2 = \frac{\in^3}{2\beta^2 - \in}\dot{Q}, \qquad (12,1b)$$

$$e^2 = \dot{q}, \qquad (12,2a)$$

$$H^2 = q + (\beta^2 - \in)\,\dot{q}, \qquad (12,2b)$$

Эти функции должны согласоваться междуй собой по формуле (1). А именно

$$\in = \varepsilon + Q + \in\dot{Q} + \dot{q}. \qquad (13)$$

Уравнение дифференциальной связи (13) интегрируется и в результате получаем конечное выражение с одной константой с

$$\in Q + q = \frac{\in^2}{2} - \varepsilon \in + c. \qquad (14)$$

Связь между двумя вспомогательными функциями оказалась весьма простой.

Теперь рассмотрим два частных случая этого уравнения.

А. Пусть $q=0.$, тогда по (12.2 a) и (12.2b) будут

$$H^2 = e^2 = 0. \qquad (15)$$

а для Q находим, что

$$Q = 0.5 \in - \varepsilon + \frac{c}{\in}. \qquad (16)$$

Используя это выражение, находим из (12.1b) что

$$h^2 = \frac{\in}{2\beta^2 - \in}\left(\frac{\in^2}{2} - c\right). \qquad (17)$$

Это выражение совпадает с формулой, ранее полученной другим методом (17) в [4], если константу с брать в виде

$$\frac{\varepsilon^2}{2} + cnst. \qquad (18)$$

А также для A^2 получаем по формуле (12,1a), что

$$A^2 = \frac{2(\in - \varepsilon)(2\beta^2 - \in) \in - \beta^2(\in^2 - \varepsilon^2 - 2 \cdot cnst)}{2(2\beta^2 - \in)\in}. \qquad (19)$$

в соответствии с

$$A^2 = \in - \varepsilon - E^2.$$

Б. Пусть $Q = 0.$, тогда по (12,1a) и (12,1б) будут

$$A^2 = h^2 = 0 \qquad (20)$$

а для q находим, что

$$q = \frac{\in^2}{2} - \varepsilon \in + c. \qquad (21)$$

Используя это выражение, получаем из (12,2a) и (12,2b), что

$$e^2 = \in - \varepsilon, \; H^2 = 0.5(\in - \varepsilon)(2\beta^2 - \in - \varepsilon) + cnst. \qquad (22)$$

В последнем из них константа c бралась в виде (18). Эти формулы переходят в выражения, которые получаются методом первого интеграла.

Таким образом наш метод введения вспомогательных функций позволяет корректно решать частные задачи TE и TM волн. Переход к общему случаю осуществляется через согласование уравнений (7,1b) и (7,2 a). Объдиняя эти уравнения получаем, что

$$\frac{dh^2\, d\in}{-\in\sqrt{A^2h^2-4c_{01}{}^2}}=\frac{de^2\, d\in}{\sqrt{H^2e^2-4c_{02}{}^2}}. \quad (23)$$

Освобождаясь от радикалов и используя уравнение связи (14), уравнение для q перепишем в явном виде:

$$(2\beta^2-\in)^2\in^2 u(\in,q,\dot{q})\ddot{q}^2+(2\beta^2-\in)\in^2 v(\in,q,\dot{q})\ddot{q}+w(\in,q,\dot{q})=0, \quad (24)$$

где введены следуюшие обозначения :

$$u(\in,q,\dot{q})=\beta^2q^2-(2\beta^2a(2)-a(1)\in^2)q-\in^2(2(\in-\beta^2)a(1)-a(2))\dot{q}+$$
$$+4c_{01}{}^2(2\beta^2-\in)^2-4c_{02}{}^2\in^2-r(5),$$

$$v(\in,q,\dot{q})=-4\beta^2q^2\dot{q}+4\beta^2(2\in-\beta^2)q\dot{q}^2-4\beta^2(\in-\beta^2)\in\dot{q}^3-2r(3)q\dot{q}-$$
$$-2(\beta^2-\in)r(3)\dot{q}^2+16\beta^2c_{02}{}^2q-16\beta^2c_{02}{}^2\in\dot{q}+8c_{02}{}^2r(3),$$

$$w(\in,q,\dot{q})=4\beta^4(q^3\dot{q}+(\beta^2-3\in)q^2\dot{q}^2-(2\beta^2\in-3\in^2)q\dot{q}^3+(\beta^2-\in)\in^2\dot{q}^4)+$$
$$4\beta^2(r(3)q^2\dot{q}+(\beta^2-2\in)r(3)q\dot{q}^2-(\beta^2-\in)\in r(3)\dot{q}^3-4\beta^2c_{02}{}^2q^2)+$$
$$+(r(3)^2+32\beta^4c_{02}{}^2\in)q\dot{q}+((\beta^2-\in)r(3)^2-16\beta^4c_{02}{}^2\in^2)\dot{q}^2-$$
$$-16\beta^2c_{02}{}^2r(3)q+16\beta^2c_{02}{}^2r(3)\in\dot{q}-4c_{02}{}^2r(3)^2,$$

$$a(1)=\in-\varepsilon,\quad a(2)=0.5\in^2-\varepsilon\in+c,\quad r(3)=-\in^3+3\beta^2\in^2-2\beta^2c,$$
$$r(5)=\in^2(a(1)a(2)-(\in-\beta^2)a(1)^2)-\beta^2a(2)^2$$

В случае решения этого уравнения мы сумеем свести задачу к квадратуре. Порядок следования процедуры таков :

1. Определение $Q(\in)$ из (14) через $q(\in)$,
2. Определение A^2, h^2 по формуле (12,1а) и (12,1б),
3. Определение e^2, H^2 по формуле (12,2а) и (12,2б),
4. $z(\in)$ находится как

$$z=d\pm\frac{1}{2}\int_{,}^{\in}\frac{\in^3+2\beta^2h^2}{\in^2(\in-2\beta^2)\sqrt{A^2h^2-4c_{01}{}^2}+\in^3\sqrt{H^2e^2-4c_{02}{}^2}}d\in. \quad (25)$$

где ϵ_d - значение диэлектрической функции на граничной подложкой плоскости плёнки z= d, d-толщина плёнки.

5.Определение волнового поля как

$$H^2(\in(z)),\ e^2(\in(z)),\ A^2(\in(z)),\ h^2(\in(z))$$

Заметим, что в соответсвии с исходными четырьмя уравнениям первого порядка здесь общее решение будет содержать четы независимых постоянных кроме co_1, co_2

ВЫВОД

Предлагается метод для интегрирования полной систе уравнений Максвелла для задачи распространения световых во общей поляризации в диэлектрической пленке с нелинейностью ти Керра. Метод опирается на решении, полученного автор дифференциального уравнения второго порядка для одн вспомогательной функции.

Литература

[1] А.Е.Каплан. Письма в ЖЭТФ, Т.24, С.132-137, 1976.
[2] K.M.Leung, R.L.Lin. Phys. Rev.,Vol. 44, No.10, P.5007, 1991.
[3] Г.Очирбат. Препринт ОИЯИ, Р17-91-358, Дубна, 1991.
[4] Г.Очирбат, Д.Улам-Оргих, О.Нямсүрэн. Препринт ОИЯИ, Р17-96-382, Дубна, 1996.

Abstract

A method is suggested to integrate full set of Maxwell equations the problem of propagating of generally polarised stationary light waves dielectric film with kerr nonlinearity. The method is based on solving a seco order differential equation, obtained by the author for a single auxilia function.