

Геофизикийн тоон загварчлал. I. Төгсгөлөг ялгаврын аргад суурилсан цахилгаан соронзон индукцийн тэгшитгэлийн 2-D гаргалгаа.

Э.Батмагнай^{a*}

a – ШУА-ийн Одон орон геофизикийн хүрээлэн, Соронзон судлалын салбар

ХУРААНГУЙ

Геофизикийн цахилгаан соронзон индукцийн арга нь Дэлхийн царцдас болон мантийн цахилгаан дамжуулах чадварын тогтцыг судлах физик тодорхойлолт юм. Энэхүү судалгаанд хоёр хэмжээст цахилгаан соронзон орны тоон загварчлалын үндсэн тэгшитгэлүүдийг Максвеллийн тэгшитгэлээс гарган авч, тэдгээрийг төгсгөлөг ялгаврын аргын хүрээнд томъёоллоо. Геофизикийн судалгаанд хэрэглэгддэг давтамжийн мужид тохиромжтой квазистатик дөхөлтийг ашиглан давтамжийн муж дахь хосолсон цахилгаан соронзон системийг загварчилсан. Хоёр хэмжээст Дэлхийн загварыг авч үзсэнээр бодлогыг хөндлөн цахилгаан болон хөндлөн соронзон горимуудад задлан, тус бүрийг скаляр Гельмгольцийн хэлбэрийн тэгшитгэлээр илэрхийлэв. Эдгээр тэгшитгэлийг бүтэцлэгдсэн торон дээр төвийн төгсгөлөг ялгаврын схемээр дискретчилж, тоон хэрэгжилтэд тохиромжтой шугаман алгебрийн тэгшитгэлийн систем болгон хувиргав. Ийнхүү боловсруулсан томъёолол нь цахилгаан соронзон хариу үйлдлийн шууд загварчлал, ялангуяа магнетотеллурикийн хэрэглээнд зориулсан онолын суурийг бүрдүүлж байна. Энэхүү ажил нь цаашдын тоон хэрэгжилт, торон байгууламжийн оновчлол, мөн нийлмэл гео-цахилгаан бүтэцтэй орчны урвуу бодлогын хүрээг хөгжүүлэх үндэс болно.

Түлхүүр үгс: Цахилгаан соронзон индукц, Магнетотеллурик, Төгсгөлөг ялгаврын арга, 2-D шууд бодлого.

I. УДИРТГАЛ

Цахилгаан соронзон индукцийн тоон загварчлал нь газрын гүний цахилгаан дамжуулах чадварын тархалтыг тодорхойлох геофизикийн үндсэн арга зүйн нэг юм. Магнетотеллурик (МТ) арга нь цэнэгт болон соронзон мандлаас үүсэх байгалийн цахилгаан соронзон орныг ашиглан газрын гүний геоцахилгаан бүтцийг тодорхойлдог бөгөөд ашигт малтмалын хайгуул, газрын тос, геотермаль систем, тектоник бүтэц, газрын царцдасын судалгаанд өргөн хэрэглэгддэг [1–6]. МТ өгөгдлийн тайлал нь зөвхөн хэмжилт, өгөгдөл боловсруулах болон инверсийн алгоритмаас гадна цахилгаан соронзон орны физик үндэс, үндсэн тэгшитгэлүүд, тоон дискретчлэл болон шийдийн тогтвортой байдлыг зөв ойлгохоос шууд хамаардаг.

Максвеллийн тэгшитгэлээр тодорхойлогдох цахилгаан соронзон орны тархалтын бодлого нь бодит геологийн орчинд аналитик шийдгүй байдаг. Учир нь дэлхий нь цахилгаан дамжуулах чадварын хүчтэй орон зайн өөрчлөлт, нийлмэл геометр, гадаргын рельеф зэрэг олон хүчин зүйлийг агуулдаг. Иймээс цахилгаан болон

соронзон орны тархалтыг тооцоолохдоо төгсгөлөг ялгаврын арга, төгсгөлөг элементийн арга, интеграл тэгшитгэлийн арга зэрэг тоон аргуудыг өргөн хэрэглэдэг [7–12]. Эдгээрээс төгсгөлөг ялгаврын арга (ТЯА) нь математик томъёолол энгийн, алгоритмын бүтэц ойлгомжтой, программчлахад харьцангуй хялбар тул хоёр хэмжээст цахилгаан соронзон загварчлалын суурь алгоритм боловсруулахад өргөн ашиглагддаг [9–12].

Сүүлийн жилүүдэд МТ-ийн шууд болон урвуу бодлогод зориулсан олон тооны программ хангамж хөгжсөн бөгөөд тэдгээрийн ихэнх нь өндөр нарийвчлалтай тооцоолол хийх боломжтой болсон [13–18]. Гэсэн хэдий ч эдгээр программын ихэнх нь хэрэглэгчийн түвшинд бэлэн хэрэгсэл байдлаар ашиглагддаг бөгөөд үндсэн тэгшитгэл, дискретчлэл, матриц байгуулах, шугаман систем шийдвэрлэх зэрэг үндсэн алгоритмуудыг өөрчлөх боломж хязгаарлагдмал байдаг. Нөгөө талаас нээлттэй эх үүсгүүр бүхий зарим кодууд нь өндөр гүйцэтгэлтэй тооцооллын орчин, параллель боловсруулалт шаарддаг тул сургалт, суурь

^a batmagnai@iag.ac.mn

судалгаа болон шинэ алгоритм хөгжүүлэхэд шууд ашиглахад хүндрэлтэй байдаг [13-18].

Иймээс цахилгаан соронзон орны физик үндэс, төгсгөлөг ялгаврын дискретчлэл болон тоон шийдлийн бүтцийг системтэй тайлбарласан суурь загварчлалын хүрээ боловсруулах нь онолын болон практикийн ач холбогдолтой [19-22]. Ялангуяа судлаачид үндсэн тэгшитгэлээс эхлэн алгоритмын хэрэгжилт хүртэлх бүх үе шатыг ойлгож, цаашид өөрийн хэрэгцээнд нийцүүлэн өргөтгөх боломжтой байх нь шинэ арга боловсруулах болон инверсийн алгоритм хөгжүүлэхэд чухал суурь болдог.

Энэхүү өгүүллийн зорилго нь хоёр хэмжээст МТ-ийн шууд бодлогын онолын үндэс болон төгсгөлөг ялгаврын аргын томъёоллыг системтэйгээр тайлбарлаж, Питон хэл дээр хэрэгжүүлэх боломжтой суурь алгоритмыг боловсруулахад оршино. Үүний тулд Максвеллийн тэгшитгэлээс ТЕ болон ТМ туйлшралыг тодорхойлох үндсэн тэгшитгэлүүдийг гарган авч, тэдгээрийг төгсгөлөг ялгаврын аргаар дискретчилэн комплекс сийрэг шугаман систем болгон хувиргах аргыг тайлбарлав. Мөн тооцооллын торон байгууламж, захын нөхцөл, систем шийдвэрлэх арга болон МТ респонс функцүүдийг тооцоолох үндсэн алгоритмыг боловсруулах алгоритмуудыг хөгжүүлэх үндэс суурь болно.

Энэхүү ажил нь МТ загварчлалын онол, төгсгөлөг ялгаврын аргыг нэгтгэн тайлбарлаж, сургалт, судалгаа болон цаашдын программ хөгжүүлэлтэд ашиглах боломжтой суурь хэрэгжилтийг боловсруулахад чиглэсэн болно. Боловсруулж буй Питонд суурилсан PyMT_tools багцын хүрээнд энэхүү 2-D шууд бодолтын модуль нь цахилгаан соронзон орны тоон загварчлал, синтетик туршилт, торон загварын үнэлгээ болон цаашдын инверсийн алгоритм хөгжүүлэх суурь хэсэг болно.

Өгүүллийн бүтэц дараах байдалтай. II бүлэгт цахилгаан соронзон индукцийн онолын үндэс болон хоёр хэмжээст ТЕ, ТМ горимын удирдах тэгшитгэлүүдийг гаргав. III бүлэгт төгсгөлөг ялгаврын дискретчлэл, захын нөхцөл болон шугаман системийн томъёоллыг тайлбарлав. IV бүлэгт PyMT_tools багцад хэрэгжүүлэх Питонд суурилсан алгоритмын ерөнхий бүтэц, тор үүсгэх, матриц байгуулах болон МТ респонс тооцоолох алхмуудыг танилцуулав. V бүлэгт нэгэн төрлийн хагас орон зайн синтетик

туршилтаар алгоритмын зөв ажиллагаа, торон бүтцийн нөлөөг шалгав. Эцэст нь VI бүлэгт үндсэн дүгнэлт болон цаашдын хөгжүүлэх чиглэлийг нэгтгэн хэлэлцэв.

II. ОНОЛЫН ҮНДЭС

A. Физик үндэс

МТ арга нь дэлхийн байгалийн цахилгаан соронзон орны хэлбэлзлийг ашиглан газрын гүний цахилгаан дамжуулах чадварын тархалтыг тодорхойлох геофизикийн арга юм [1-4]. Энэхүү аргын үндэс нь цахилгаан соронзон индукцийн үзэгдэл бөгөөд цаг хугацааны хувьд өөрчлөгдөж буй цахилгаан соронзон орон цахилгаан дамжуулагч орчинтой харилцан үйлчилснээр газрын гүнд хоёрдогч цахилгаан гүйдэл үүсдэг. Энэ нь МТ -ийн үндсэн физик үзэгдэл юм.

МТ судалгаанд ашиглагдах анхдагч цахилгаан соронзон орон нь ихэвчлэн цэнэгт ба соронзон мандал дахь гүйдлийн системүүдээс үүсэх бөгөөд эдгээр нь 10^{-4} – 10^4 Гц орчмын өргөн давтамжийн мужид хэлбэлздэг [2,4]. Анхдагч орны нөлөөгөөр дэлхийн дотор индукцийн гүйдэл үүсэж, энэхүү гүйдэл нь хоёрдогч соронзон орныг бий болгон гадарга дээр хэмжигдэх нийт цахилгаан болон соронзон орныг бүрдүүлдэг [2,3]. Иймээс МТ аргын шууд бодлогын зорилго нь өгөгдсөн цахилгаан дамжуулах чадварын загварын хувьд Максвеллийн тэгшитгэлийг бодож, гадарга дээрх цахилгаан болон соронзон орныг тодорхойлох явдал юм.

Цахилгаан дамжуулагч орчин дахь индукцийн гүйдлийн нягтралыг Омын хуулиар

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (1)$$

гэж илэрхийлнэ. Энд σ – нь орчны цахилгаан дамжуулах чадвар (С/м), $\mathbf{J}$ – нь цахилгаан гүйдлийн нягт (А/м²), $\mathbf{E}$ – нь цахилгаан орны хүчдэлтийн вектор (В/м). Тэгшитгэл (1)-ээс харахад цахилгаан орны үйлчлэлээр үүсэх индукцийн гүйдлийн хэмжээ нь тухайн орчны цахилгаан дамжуулах чадвараас шууд хамаарна. Дамжуулах чадвар өндөр бүсүүдэд илүү хүчтэй индукцийн гүйдэл үүсдэг бөгөөд энэ нь МТ хэмжилтийн үндсэн мэдээллийг бүрдүүлдэг.

Б. Максвеллийн тэгшитгэл ба квазистатик дөхөлт

MT аргын математик загварчлал нь цахилгаан соронзон орныг тодорхойлох Максвеллийн тэгшитгэлүүдийн гаргалгаад суурилдаг. Дифференциал хэлбэрээр эдгээрийг дараах байдлаар илэрхийлнэ [6,22]:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (5)$$

энд $\mathbf{E}$ – нь цахилгаан орны хүчдэл (В/м), $\mathbf{H}$ – нь соронзон орны хүчдэл (А/м), $\mathbf{B}$ – нь соронзон урсгалын нягт (Т), $\mathbf{D}$ – нь цахилгаан шилжилтийн вектор (С/м²), ρ – нь цахилгаан цэнэгийн нягт (С/м³ эсвэл $\Omega \cdot \text{м}$)-ийг тус тус илэрхийлнэ. Изотроп, шугаман орчинд материалын хамаарлыг

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (6)$$

гэж бичих бөгөөд энд μ – нь соронзон нэвтрүүлэх чадвар (Н/м), ε – нь диэлектрик нэвтрүүлэх чадвар (Ф/м) болно.

Геофизикийн цахилгаан соронзон судалгаанд ашиглагдах давтамжийн мужид дамжуулагчийн гүйдэл нь шилжилтийн гүйдлээс хэд дахин их байдаг тул

$$\sigma \gg \omega \varepsilon, \quad (7)$$

гэсэн квазистатик нөхцөл хангагдана [6,22]. Иймээс Ампер–Максвеллийн хуулийн шилжилтийн гүйдлийг үл тооцож,

$$\nabla \times \mathbf{H} \approx \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad (8)$$

гэж хялбарчилж болно. Хугацааны хувьд гармоник хэлбэлзэл

$$e^{i\omega t}$$

гэж үзвэл

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\omega, \quad (9)$$

болох бөгөөд Максвеллийн тэгшитгэлүүд давтамжийн мужид

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega \mu \mathbf{H}, \quad (10)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E}, \quad (11)$$

хэлбэрт шилжинэ. Эдгээр хоёр тэгшитгэл нь энэхүү судалгааны үндсэн тэгшитгэлүүд бөгөөд

дараагийн хэсэгт 2-D геоцахилгаан орчныг авч үзэн TE болон TM горимын Гельмгольд төрлийн тэгшитгэлүүдийг гарган авна.

В. 2-D геоцахилгаан орчин ба TE/TM горимууд

Энэхүү судалгаанд геоцахилгаан орчныг хоёр хэмжээст (2-D) гэж үзэв. Өөрөөр хэлбэл цахилгаан дамжуулах чадвар нь зөвхөн хэвтээ (x) болон босоо (z) чиглэлд өөрчлөгдөх бөгөөд бүтцийн суналын дагуух (y) чиглэлд тогтмол байна. Иймд

$$\frac{\partial}{\partial y} = 0, \quad (12)$$

гэсэн нөхцөл хангагдана. Энэ нь геологийн урт суналтай бүтэц, тухайлбал хагарал, үе давхарга зэрэгт өргөн хэрэглэгддэг ойролцоолол бөгөөд гурван хэмжээст бодлогыг хоёр хэмжээст хэлбэрт шилжүүлснээр тооцооллыг мэдэгдэхүйц хялбаршуулдаг [18,19].

Ийм нөхцөлд Максвеллийн тэгшитгэлүүд хоорондоо үл хамаарах хоёр туйлшралын горимд задлагдана. Эхнийх нь **хөндлөн цахилгаан (Transverse Electric, TE)** горим бөгөөд цахилгаан орны зөвхөн y-байгуулагч хадгалагдаж,

$$\mathbf{E} = (0, E_y, 0),$$

харин соронзон орон нь

$$\mathbf{H} = (H_x, 0, H_z)$$

байна. Энэ тохиолдолд Максвеллийн тэгшитгэлээс дараах Гельмгольцийн төрлийн тэгшитгэл гарна.

$$\nabla^2 E_y + i\omega \mu \sigma E_y = 0. \quad (13)$$

Энд E_y – нь цахилгаан орны y-байгуулагч, $\omega = 2\pi f$ – нь өнцгийн давтамж (рад/с), μ – нь соронзон нэвтрүүлэх чадвар.

Хоёр дахь нь **хөндлөн соронзон (Transverse Magnetic, TM)** горим бөгөөд зөвхөн соронзон орны y-байгуулагч үлдэх бөгөөд

$$\mathbf{H} = (0, H_y, 0),$$

цахилгаан орон нь

$$\mathbf{E} = (E_x, 0, E_z)$$

хэлбэртэй байна. Энэ үед үндсэн тэгшитгэл нь

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\sigma} \nabla H_y \right) + i\omega\mu H_y = 0. \quad (14)$$

Энд H_y – нь соронзон орны у-байгуулагч бөгөөд дамжуулах чадварын орон зайн өөрчлөлт нь дифференциал оператороор илэрхийлэгдэх тул ТМ горим нь цахилгаан дамжуулах чадварын огцом өөрчлөлтөд ТЕ горимоос илүү мэдрэмтгий байдаг.

Энэхүү судалгаанд дээрх ТЕ болон ТМ горимын удирдах тэгшитгэлүүдийг Максвеллийн тэгшитгэлээс гарган авч, дараагийн бүлэгт төгсгөлөг ялгаврын аргаар дискретчилэн шугаман алгебрын систем болгон хувиргаж тоон аргаар шийдвэрлэсэн болно.

Г. МТ респонс функц

Газрын гадарга дээр тооцоологдсон цахилгаан болон соронзон орны байгуулагчдаас МТ-ийн импеданс тензорыг дараах байдлаар тодорхойлно [2,4].

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix}, \quad (15)$$

энд Z_{ij} – нь комплекс импедансын элементүүд бөгөөд цахилгаан ба соронзон орны харьцааг илэрхийлнэ. Хоёр хэмжээст орчинд диагональ элементүүд (Z_{xx} , Z_{yy}) онолын хувьд тэгтэй ойролцоо байх бол геоцахилгаан бүтцийн үндсэн мэдээллийг диагональ бус элементүүд болох Z_{xy} болон Z_{yx} агуулдаг.

Импеданс тензорийн элемент бүрэд төлөөллийн эсэргүүцэл $\rho_{a_{ij}}$ болон фазыг ϕ_{ij} дараах байдлаар тодорхойлно.

$$\rho_{a_{ij}} = \frac{|Z_{ij}|^2}{\mu\omega}, \quad (16)$$

$$\phi_{ij} = \tan^{-1} \left(\frac{\text{Im}(Z)}{\text{Re}(Z)} \right), \quad (17)$$

энд ρ_a – нь төлөөллийн эсэргүүцэл ($\Omega \cdot \text{м}$), ϕ – нь импедансын фаз ($^\circ$), харин $\text{Re}(Z)$ болон $\text{Im}(Z)$ – нь импедансын бодит болон хуурмаг хэсгийг тус тус илэрхийлнэ. Эдгээр нь МТ хэмжилтийн үндсэн респонс функцүүд бөгөөд геоцахилгаан бүтцийн гүний өөрчлөлтийг тодорхойлоход ашиглагддаг.

Цахилгаан соронзон орны нэвтрэх гүнийг скин гүнээр илэрхийлэх бөгөөд

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}}, \quad (18)$$

гэж тодорхойлогдоно. Скин гүн нь цахилгаан соронзон орны далайц анхны утгынхаа $1/e$ хүртэл буурах гүнийг илэрхийлэх бөгөөд өндөр давтамж нь газрын гадаргын ойролцоох бүтэц, харин нам давтамж нь илүү гүний бүтцийг судлах боломжийг олгодог.

Ийнхүү Максвеллийн тэгшитгэлээс гарган авсан ТЕ болон ТМ горимын удирдах тэгшитгэлүүд, тэдгээрээс тооцоологдох импедансын тензор болон МТ респонс функцүүд нь энэхүү судалгааны тоон загварчлалын онолын үндсийг бүрдүүлнэ. Дараагийн бүлэгт эдгээр үндсэн тэгшитгэлүүдийг төгсгөлөг ялгаврын аргаар дискретчилж, тоон шийдлийн алгоритмыг боловсруулсан болно.

III. ТӨГСГӨЛӨГ ЯЛГАВРЫН АРГАД СУУРИЛСАН 2-D МАГНЕТОТЕЛЛУРИК ЗАГВАРЧЛАЛ

Энэ бүлэгт II бүлэгт тодорхойлсон ТЕ болон ТМ горимын тэгшитгэлүүдийг (Тэг.13 ба 14) ТЯА - р дискретчилэн шугаман алгебрын систем болгон хувиргах аргыг тайлбарлав. Дискретчлэлийн дараа үүсэх комплекс сийрэг матрицад тохирох захын нөхцөл ашиглаж, тоон аргаар шийдвэрлэн газрын гадарга дээрх цахилгаан болон соронзон орны байгуулагчдыг тооцоолно.

А. Дискретчлэл ба торон байгууламж

ТЕ болон ТМ горимын үндсэн тэгшитгэлүүд нь бодит геологийн орчинд аналитик шийдгүй тул тооцооллын мужийг дискрет торон бүтэц болгон хувиргаж ТЯА-ыг хэрэглэв. Энэхүү судалгаанд тооцооллын мужийг 2-D $x - z$ хавтгайд тэгш өнцөгт тороор хувааж, үл мэдэгдэх орны байгуулагчийг торын зангилаан дээр тодорхойлсон. Энд

$$x_i = i\Delta x, \quad z_j = j\Delta z,$$

ба Δx , Δz – нь хэвтээ болон босоо чиглэлийн торын алхамуудыг илэрхийлнэ.

ТЯА-ын үндсэн санаа нь тасралтгүй уламжлалыг төв ялгаврын схемээр ойролцоо илэрхийлэхэд оршино. Хоёрдугаар эрэмбийн уламжлалуудыг

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta z^2}, \quad (20)$$

гэж ойролцоо тооцоолно.

Үүний үр дүнд Лапласын оператор дараах дискрет хэлбэрт шилжинэ.

$$\nabla^2 u \approx \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - 2u_{i,j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 2u_{i,j}}{\Delta z^2} \quad (21)$$

Энэхүү схем нь хоёрдугаар эрэмбийн нарийвчлалтай бөгөөд тогтмол алхамтай торон байгууламжид тогтвортой шийдэл өгдөг.

Б. ТЕ горимын дискретчлэл

II бүлэгт гарган авсан ТЕ горимын Гельмгольцийн тэгшитгэл (Тэг. 13)-ийг төв ялгаврын схемээр дискретчилбэл

$$\begin{aligned} & \frac{E_{i+1,j} + E_{i-1,j} - 2E_{i,j}}{\Delta x^2} \\ & + \frac{E_{i,j+1} + E_{i,j-1} - 2E_{i,j}}{\Delta z^2}, \\ & + i\omega\mu\sigma_{i,j}E_{i,j} = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

болно.

Энд $E_{i,j}$ – нь тухайн торын зангилаан дахь цахилгаан орны у-байгуулагч, $\sigma_{i,j}$ – нь тухайн зангилаанд харгалзах цахилгаан дамжуулах чадвар юм. Тэгшитгэл (22)-оос харахад нэг зангилаан дахь үл мэдэгдэх утга нь дөрвөн хөрш зангилаатайгаа холбогдох тул таван цэгийн дискрет схем үүсгэнэ.

Бүх торын зангилаанд энэхүү тэгшитгэлийг бичсэний дараа ТЕ горимын бодлого

$$A_{TE}E = b \quad (23)$$

хэлбэрийн комплекс сийрэг шугаман систем болон хувирна.

В.ТМ горимын дискретчлэл

ТМ горимын удирдах тэгшитгэлд цахилгаан дамжуулах чадвар дифференциал операторын

дотор ордог тул дискретчлэл хийхдээ интерфейсийн дамжуулах чадварыг ашиглана.

х-чиглэл дэх операторыг

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_y}{\partial x} \right)$$

дараах төв ялгаврын схемээр ойролцоо илэрхийлнэ.

$$\frac{1}{\Delta x^2} \left[\frac{H_{i+1,j} - H_{i,j}}{\sigma_{i+\frac{1}{2},j}} - \frac{H_{i,j} - H_{i-1,j}}{\sigma_{i-\frac{1}{2},j}} \right]. \quad (24)$$

Үүнтэй адил z-чиглэлд дискретчилсний дараа ТМ горимын үндсэн тэгшитгэл

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x^2} \left[\frac{H_{i+1,j} - H_{i,j}}{\sigma_{i+\frac{1}{2},j}} - \frac{H_{i,j} - H_{i-1,j}}{\sigma_{i-\frac{1}{2},j}} \right] \\ & + \frac{1}{\Delta z^2} \left[\frac{H_{i,j+1} - H_{i,j}}{\sigma_{i,j+\frac{1}{2}}} - \frac{H_{i,j} - H_{i,j-1}}{\sigma_{i,j-\frac{1}{2}}} \right] + i\omega\mu H_{i,j} = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Энд

$$\sigma_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{2\sigma_{i,j}\sigma_{i+1,j}}{\sigma_{i,j} + \sigma_{i+1,j}} \quad (26)$$

нь хөрш хоёр нүдний зааг дээрх гармоник дундаж дамжуулах чадвар бөгөөд интерфэйс дээр гүйдлийн тасралтгүй нөхцөлийг хангадаг. ТЕ горимоос ялгаатай нь ТМ горимын коэффициентууд нь орчны дамжуулах чадварын өөрчлөлтөөс шууд хамаарах тул өндөр контрасттай орчинд илүү мэдрэмтгий байдаг.

Г. Захын нөхцөл

ТЯА-р тооцооллын мужийг хязгаарлагдмал хэмжээгээр сонгодог тул захын нөхцөлийг зөв тодорхойлох нь шийдлийн үнэн зөв байдалд чухал нөлөөтэй. Захын нөхцөл буруу сонгогдвол хиймэл ойлт үүсэж, цахилгаан болон соронзон орны тархалт, улмаар МТ респонс функцүүдэд систематик алдаа бий болдог. Иймээс тооцооллын мужийн хажуу болон доод захыг хамгийн бага давтамжид харгалзах скин гүнээс хэд дахин их зайд байрлуулна.

Энэхүү судалгаанд тооцооллын хилийг Γ -ээр тэмдэглэв. Захын нөхцөлүүдийг ерөнхий байдлаар дараах хэлбэрээр илэрхийлж болно.

Дирихлегийн нөхцөл

$$u = u_0, \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (27)$$

энд u нь ТЕ горимд E_y , ТМ горимд H_y -г илэрхийлнэ. u_0 -ийг нэгэн төрлийн хагас орон зайн аналитик шийд эсвэл захад орны унтрах нөхцлөөс тодорхойлно.

Нейманы нөхцөл

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (28)$$

энд n – нь захын гадаргын гадагш чиглэсэн нормаль вектор юм. Энэхүү нөхцөл нь орны нормаль чиглэлийн өөрчлөлт бага гэж үзэх үед хэрэглэгдэх боловч цахилгаан соронзон орны бодлогод дангаар нь хэрэглэх нь ховор.

Практикт хамгийн өргөн хэрэглэгддэг нь **Робины (холимог)** захын нөхцөл бөгөөд

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = 0, \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (29)$$

хэлбэртэй байна. Энд α – нь долгионы унтралтыг илэрхийлэх коэффициент бөгөөд нэгэн төрлийн орчинд

$$k = \sqrt{-i\omega\mu\sigma}, \quad (30)$$

комплекс долгионы тоотой холбоотой байна.

Агаар–газар зааг дээр цахилгаан болон соронзон орны тангенциал байгуулагчид тасралтгүй байх ёстой. Иймээс

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0, \quad (31)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0, \quad (32)$$

нөхцлүүдийг хангана. Эдгээр нь агаар–газар зааг дахь цахилгаан соронзон орны физик тасралтгүй байдлыг хангаж, МТ респонс функцүүдийг тогтвортой тооцоолох үндэс болдог.

Д. Шугаман системийн шийдэл

Дискретчлэлийн дараа ТЕ болон ТМ горим тус бүр дараах хэлбэрийн комплекс коэффициент бүхий шугаман алгебрын систем болон хувирна.

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}, \quad (33)$$

энд $\mathbf{A}$ – нь төгсгөлөг ялгаврын коэффициентуудаас бүрдэх комплекс сийрэг матриц, $\mathbf{u}$ – нь үл мэдэгдэх орны вектор, $\mathbf{b}$ нь захын нөхцөл болон анхдагч орны нөлөөг агуулсан баруун гарын вектор юм. ТЕ горимд

$$\mathbf{u} = \mathbf{E}_y,$$

харин ТМ горимд

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}_y$$

болно.

Торон зангилаануудыг нэг хэмжээст индексэд хөрвүүлснээр коэффициент матриц нь таван цэгийн бүтэцтэй комплекс сийрэг матриц үүсгэнэ. Ийм төрлийн системийг шууд болон итерацийн аргаар шийдвэрлэх боломжтой. Жижиг хэмжээний торонд LU задлал зэрэг шууд аргууд үр ашигтай байдаг бол бодит МТ загварчлалд үүсэх том хэмжээний системүүдэд GMRES болон BiCGSTAB зэрэг Крыловын дэд оронгийн итерацийн аргууд илүү тохиромжтой [25,26].

Итерацийн шийдлийн чанарыг үлдэгдлийн вектороор үнэлнэ.

$$\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{u}^{(k)}, \quad (34)$$

энд k – нь итерацийн дугаар юм. Шийдлийг

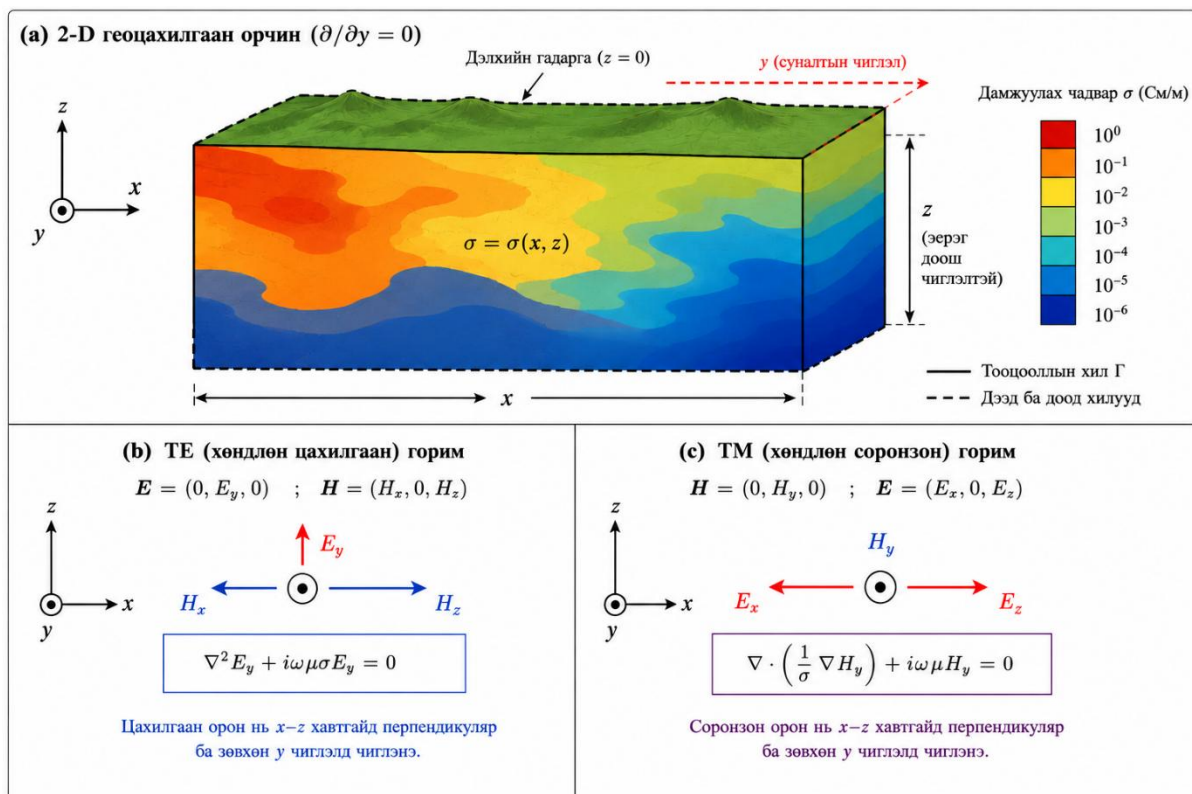
$$\frac{\|\mathbf{r}^{(k)}\|}{\|\mathbf{b}\|} < \varepsilon, \quad (35)$$

нөхцөл хангахад зогсоно. Энд ε – нь урьдчилан тогтоосон алдааны босго утга бөгөөд ихэвчлэн 10^{-6} – 10^{-8} -ийн хооронд сонгогдоно.

Итерацийн хурдыг сайжруулахын тулд урьдчилан нөхцөлжүүлэгч хэрэглэнэ.

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}, \quad (36)$$

энд $\mathbf{M}$ – нь анхны матрицтай ойролцоо боловч урвуулахад хялбар матриц бөгөөд практикт диагональ, бүрэн бус LU (ILU) болон олон торын



Зураг 1. 2 хэмжээст геоцахилгаан орчин ($\partial/\partial y = 0$) болон ТЕ ба ТМ туйлшралын горимуудын схем. ТЕ горимд E_y , ТМ горимд H_y – нь үндсэн үл мэдэгдэх хувьсагч бөгөөд эдгээрээс харгалзах Гельмгольцийн төрлийн удирдах тэгшитгэлүүдийг гарган авч төгсгөлөг ялгаврын аргаар бодсон.

урьдчилан нөхцөлжүүлэгчийг өргөн хэрэглэдэг [27,28].

МТ загварчлалд давтамж бүрийн бодлого бие даасан тул

$$\mathbf{A}(\omega_m)\mathbf{u}(\omega_m) = \mathbf{b}(\omega_m), m = 1, \dots, N_f, \quad (37)$$

системүүдийг зэрэгцээ байдлаар шийдвэрлэх боломжтой. Энэ нь олон давтамжийн МТ тооцооллын нийт хугацааг мэдэгдэхүйц бууруулдаг.

Ийнхүү ТЕ болон ТМ горимын дискрет тэгшитгэлүүдийг төгсгөлөг ялгаврын аргаар шугаман алгебрын систем болгон хувиргаж, тохирох захын нөхцөл болон итерацийн шийдэгч ашигласнаар газрын гадарга дээрх цахилгаан болон соронзон орны байгуулагчдыг тооцоолно. Дараагийн шатанд эдгээр байгуулагчдаас импедансын тензор, төлөөллийн эсэргүүцэл болон импедансын фазыг (Тэг. 15–17) тодорхойлно.

IV. ПИТОНД СУУРИЛСАН АЛГОРИТМ БА ХЭРЭГЖИЛТ

Энэ бүлэгт өмнөх хэсгүүдэд гарган авсан ТЕ болон ТМ горимын төгсгөлөг ялгаврын

тэгшитгэлүүдийг Питон орчинд хэрхэн хэрэгжүүлсэн талаар тайлбарлав. Хэрэгжилтийн үндсэн зорилго нь өгөгдсөн хоёр хэмжээст цахилгаан дамжуулах чадварын загвар $\sigma(x, z)$, давтамжийн цуваа f_i , торон байгууламж болон захын нөхцөл Γ -ийн хувьд цахилгаан болон соронзон орны байгуулагчдыг тооцоолж, улмаар МТ респонс функцүүдийг тодорхойлох явдал юм.

Боловсруулсан код нь модульчилсан бүтэцтэй. Үндсэн модулиуд нь тооцооллын муж байгуулах, тор үүсгэх, дамжуулах чадварын загвар оноох, ТЕ ба ТМ горимын матриц байгуулах, захын нөхцөл хэрэгжүүлэх, комплекс шугаман систем шийдвэрлэх, импеданс болон МТ респонс функц тооцоолох алхмуудаас бүрдэнэ. Ийм бүтэц нь алгоритмын хэсэг бүрийг тусад нь шалгах, сайжруулах, цаашид инверсийн кодтой холбох боломжийг олгодог.

A. Ерөнхий алгоритм

МТ шууд бодолтын ерөнхий дарааллыг Алгоритм 1-д үзүүлэв. Эхлээд тооцооллын муж ба торон байгууламжийг тодорхойлж, дараа нь дамжуулах чадварын загварыг торын зангилаа эсвэл нүд бүрт онооно. Үүний дараа давтамж

Алгоритм 1:

Оролт: Загварчлалын хавтгай Ω , давтамж f_i , дамжуулагчийн загвар $\sigma(x, z)$, захын нөхцөл Γ .

Гаралт: Цахилгаан E ба соронзон H орон, импеданс тензор ба (Тэг. 16 – 17).

1. Тоон хэлхээ үүсгэх
2. Дамжуулагчийн утга оноох
3. Давтамжийн зурвасыг тооцоолох (N)
4. **for** $f = 1:N$
5. ТЕ систем матриц байгуулах
6. ТМ систем матриц байгуулах
7. Замын нөхцөл оноох
8. Систем тэгшитгэлийн шийдийг олох
9. E ба H орныг тодорхойлох
10. МТ респонсийг тодорхойлох
11. **end**
12. Тоон алдааг үнэлэх
13. МТ респонсийг хадгалах

бүрийн хувьд ТЕ болон ТМ горимын коэффициент матрицыг байгуулж, захын нөхцөлийг хэрэглэн систем тэгшитгэлийг шийдвэрлэнэ. Шийдэгдсэн цахилгаан болон соронзон орны байгуулагчдаас импедансын элементүүд, төлөөллийн эсэргүүцэл болон фазын муруйг тооцоолно.

Б. Тор үүсгэх ба дамжуулах чадвар оноох

Торны бүтэц нь МТ шууд бодолтын нарийвчлал болон тооцооллын өртөгт шууд нөлөөлнө. Гадаргын ойролцоо өндөр давтамжийн цахилгаан соронзон орон хурдан өөрчлөгддөг тул энэ хэсэгт нарийн тор шаардлагатай. Харин гүн рүү орох тусам орны өөрчлөлт аажим болдог учир торын алхмыг томруулах боломжтой.

Жигд торонд бүх зангилааны хоорондын зай тогтмол байна:

$$x_i = i\Delta x, z_j = j\Delta z.$$

Харин жигд бус торонд босоо чиглэлд суналтын функц ашиглаж, гадаргын ойролцоо жижиг алхамтай, гүн рүү аажмаар томрох тор үүсгэнэ. Энэ нь өндөр давтамжийн респонс функцүүдийг илүү зөв дүрслэхийн зэрэгцээ үл мэдэгдэхийн тоо болон тооцооллын хугацааг бууруулдаг.

Дамжуулах чадварын загварыг хоёр хэмжээст массив хэлбэрээр хадгална:

$$\sigma(x, z) \rightarrow \sigma_{i,j}.$$

Нэгэн төрлийн туршилтад бүх нүдэнд ижил дамжуулах чадвар онооно. Харин нэгэн төрлийн бус загварт дамжуулагч болон эсэргүүцэл өндөртэй биетүүдийг тусгай геометрээр тодорхойлж, тэдгээрт өөр өөр σ -ийн утга онооно. Ингэснээр үе давхарга, хагарал, дамжуулагч суваг зэрэг энгийн геоцахилгаан бүтцийг загварчлах боломжтой.

В. Матриц байгуулах ба систем шийдвэрлэх

ТЕ болон ТМ горимын дискрет тэгшитгэлүүдийг тус тусад нь комплекс сийрэг матриц хэлбэрээр байгуулна. Матриц байгуулах үед хоёр хэмжээст (i, j) индексийг нэг хэмжээст глобал индекс p -д хөрвүүлж, төв зангилаа болон хөрш зангилаануудын коэффициентуудыг матрицад байршуулна.

ТЕ горимын матрицын коэффициентууд нь Лапласын оператор болон төв зангилаан дахь дамжуулах чадвар $\sigma_{i,j}$ -аас хамаарна. Харин ТМ горимын хувьд коэффициентууд нь хөрш нүднүүдийн зааг дээрх гармоник дундаж дамжуулах чадвараас хамаарах тул дамжуулах чадварын огцом өөрчлөлтөд илүү мэдрэмтгий байдаг.

Комплекс шугаман системүүдийг жижиг торонд шууд LU аргаар, том торонд GMRES эсвэл BiCGSTAB зэрэг итерацийн аргаар шийдвэрлэх боломжтой. Итерацийн шийдлийн чанарыг үлдэгдлийн нормоор шалгаж,

$$\frac{\|b - Au\|}{\|b\|} < \varepsilon$$

нөхцөл хангахад шийдлийг зогсооно. Энэ ажилд тоон шийдлийн үнэн зөв байдлыг нэгэн төрлийн хагас орон зайн аналитик шийдэлтэй харьцуулах, мөн торын мэдрэмжийн туршилтаар шалгасан.

Г. МТ респонс функц тооцоолох

Систем тэгшитгэлийн шийдээр гадарга дээрх цахилгаан болон соронзон орны байгуулагчдыг тодорхойлно. Үүнээс импедансын элементүүдийг тооцоолж, цааш төлөөллийн эсэргүүцэл болон фазын муруйг гаргана. Эдгээр респонс функцүүдийг аналитик шийдтэй харьцуулан алгоритмын зөв ажиллагааг шалгасан. Жигд бус тор ашигласан үед төлөөллийн эсэргүүцэл болон фазын алдаа

мэдэгдэхүйц буурч, тооцооллын хугацаа болон санах ойн хэрэглээ багассан.

Ийнхүү боловсруулсан Питонд суурилсан хэрэгжилт нь 2-D MT шууд бодолтын суурь хүрээг бүрдүүлж байгаа бөгөөд цаашид хөгжүүлж буй PyMT_tools багцын үндсэн модулиудын нэг хэсэг болгон ашиглах боломжтой.

V. АЛГОРИТМЫН БАТАЛГААЖУУЛАЛТ БА ТООН ҮНЭЛГЭЭ

Энэ бүлэгт боловсруулсан 2-D MT шууд бодолтын алгоритмын зөв ажиллагаа, тоон нарийвчлал болон торон байгууламжийн нөлөөг нэгэн төрлийн хагас орон зайн аналитик шийдэлтэй харьцуулан үнэлэв.

Туршилтад нэгэн төрлийн хагас орон зайн эсэргүүцлийг

$$\rho_0 = 100 \, \Omega \cdot m$$

байхаар сонгож, түүнд харгалзах дамжуулах чадварыг

$$\sigma = 0.01 \, S/m$$

гэж тодорхойлов. Загварын дээд хэсэгт маш бага дамжуулах чадвартай агаарын давхаргыг оруулж, тооцооллын мужийг хэвтээ чиглэлд $\pm 100 \, km$, босоо чиглэлд ойролцоогоор $400 \, km$ хүртэл сонгосон. Давтамжийн мужийг логарифм тархалттайгаар тодорхойлж, ТЕ горимын респонс функцүүдийг бүх давтамжид тооцоолсон.

Зураг 5(а)-д нэгэн төрлийн дамжуулах чадварын загварыг үзүүлэв. Агаарын үеэс доош бүхэлдээ тогтмол дамжуулах чадвартай хагас орон зай байрлах бөгөөд энэхүү загвар нь аналитик шийдэлтэй шууд харьцуулах боломжийг олгодог. Тооцооллын нарийвчлалд торон байгууламжийн үзүүлэх нөлөөг үнэлэхийн тулд жигд болон жигд бус гэсэн хоёр төрлийн тор ашигласан. Зураг 5(б)-д бүх нүд ижил хэмжээтэй жигд тор, харин Зураг 5(в)-д газрын гадаргын ойролцоо нягтарч, гүн рүү аажмаар бүдүүрэх жигд бус торыг харуулсан. Ийм бүтэц нь гадаргын орчимд цахилгаан соронзон орны хүчтэй өөрчлөлтийг илүү нарийвчлалтай дүрслэхийн зэрэгцээ гүн хэсэгт нийт үл мэдэгдэхийн тоог бууруулах боломжийг олгодог.

Нэгэн төрлийн хагас орон зайн аналитик шийдлээр төлөөллийн эсэргүүцэл бүх давтамжид

$$\rho_a = 100 \, \Omega \cdot m$$

харин импедансын фаз

$$\phi = 45^\circ$$

утгатай тогтмол байна. Жигд тор ашигласан үр дүнг Зураг 5(г)-д үзүүлэв. Богино хугацааны мужид төлөөллийн эсэргүүцэл аналитик утгаас мэдэгдэхүйц их гарч, фаз мөн 45° -оос хазайж байгааг харж болно. Энэ нь гадаргын ойролцоох цахилгаан соронзон орны өндөр градиентийг жигд тор хангалттай нарийвчлалтай дүрсэлж чадахгүй байгаатай холбоотой.

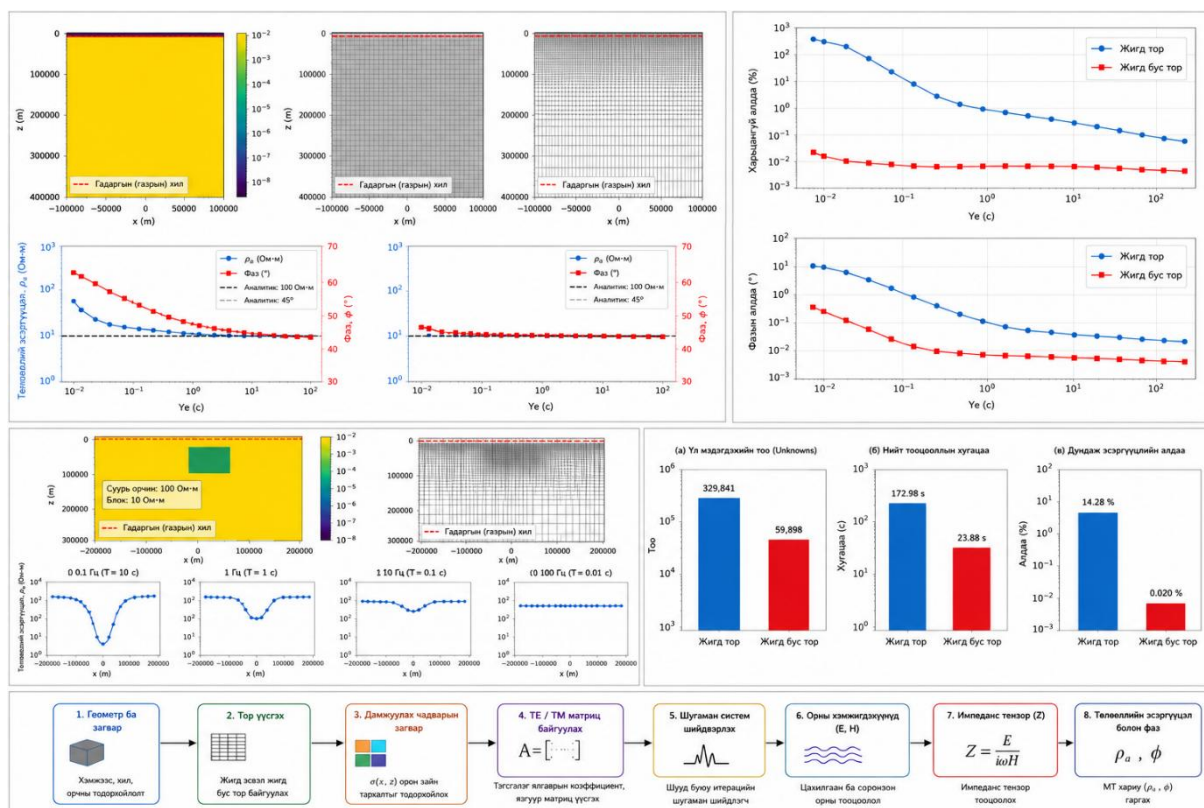
Харин жигд бус тор ашигласан үед (Зураг 5(д)) төлөөллийн эсэргүүцэл болон фаз бүх хугацааны мужид аналитик шийдэлтэй маш сайн тохирч байна. Ялангуяа богино хугацааны мужид жигд торонд ажиглагдсан хазайлт бараг бүрэн арилсан бөгөөд фазын утга 45° -д тогтвортой ойртож байгаа нь гадаргын ойролцоох торон нягтралыг нэмэгдүүлэх нь MT шууд бодолтын нарийвчлалд чухал нөлөөтэй болохыг харуулж байна.

Тооцооллын алдааг аналитик шийдэлтэй харьцуулан үнэлсэн үр дүнг Зураг 5(е) болон Зураг 5(ё)-д үзүүлэв. Жигд тор ашигласан үед богино хугацаанд төлөөллийн эсэргүүцлийн харьцангуй алдаа болон фазын алдаа хамгийн их байгаа бол хугацаа уртсах тусам алдаа аажмаар буурч аналитик шийдэлд ойртож байна. Харин жигд бус торын хувьд бүх хугацааны мужид алдаа маш бага бөгөөд аналитик шийдэлтэй бараг давхцаж байна. Энэ нь торны зохион байгуулалт нь өндөр давтамжийн MT

респонсийн тооцоололд шийдвэрлэх нөлөөтэй болохыг харуулж байна.

Тооцооллын үр ашгийн үзүүлэлтүүдийг Хүснэгт 1-д нэгтгэн үзүүлэв. Жигд тор ашиглахад нийт үл

мэдэгдэхийн тоо 329,841 байсан бол жигд бус торын хувьд 59,898 болж ойролцоогоор 5.5 дахин буурсан байна. Үүний зэрэгцээ нийт



Зураг 2. Боловсруулсан 2-D магнетотеллурикийн (MT) төгсгөлөг ялгаврын алгоритмын баталгаажуулалтын үр дүн. (а) Нэгэн төрлийн хагас орон зайн дамжуулах чадварын загвар. (б) Жигд торон бүтэц. (в) Гадаргын ойролцоо нягтруулсан жигд бус торон бүтэц. (г) Жигд тор ашиглан тооцоолсон төлөөллийн эсэргүүцэл болон фазын муруй. (д) Жигд бус тор ашиглан тооцоолсон төлөөллийн эсэргүүцэл болон фазын муруй. (е) Төлөөллийн эсэргүүцлийн харьцангуй алдаа. (ё) Фазын алдаа. Жигд бус торон бүтэц нь аналитик шийдэлтэй илүү сайн нийцэж, өндөр давтамжийн мужид тоон алдааг мэдэгдэхүйц бууруулж байгааг харуулж байна.

тооцооллын хугацаа 172.98 s-ээс 23.88 s хүртэл буюу ойролцоогоор 7.2 дахин багассан бөгөөд төлөөллийн эсэргүүцлийн дундаж харьцангуй алдаа 14.28 %-аас 0.020 %, хамгийн их алдаа 65.92 %-аас 0.045 % хүртэл буурсан байна.

Эдгээр үр дүнгээс харахад гадаргын ойролцоох торон нягтралыг нэмэгдүүлсэн жигд бус торон бүтэц нь тооцооллын хугацаа, санах ойн хэрэглээг мэдэгдэхүйц бууруулахын зэрэгцээ MT респонсийн нарийвчлалыг эрс сайжруулж байна. Иймээс энэхүү торон байгууламжийг PyMT_tools багцын 2-D шууд бодолтын үндсэн сонголт болгон ашигласан бөгөөд цаашид олон давхаргат болон хоёр хэмжээст нийлмэл геоцахилгаан загваруудын тооцоолол, түүнчлэн урвуу бодлогын алгоритм боловсруулахад суурь болгон хэрэглэх боломжтой.

Энэхүү баталгаажуулалтын үр дүн нь боловсруулсан төгсгөлөг ялгаврын алгоритм нь аналитик шийдэлтэй өндөр нарийвчлалтай нийцэж, тооцооллын хувьд үр ашигтай болохыг харууллаа. Цаашид энэхүү суурь хэрэгжилтийг олон давхаргат орчин, хоёр хэмжээст нийлмэл геоцахилгаан бүтэц болон урвуу бодлогын алгоритм боловсруулахад өргөтгөн ашиглах боломжтой.

VI. ДҮГНЭЛТ

Энэхүү ажилд Максвеллийн тэгшитгэлээс эхлэн хоёр хэмжээст MT-ийн TE болон TM горимын удирдах тэгшитгэлүүдийг гарган авч, тэдгээрийг төгсгөлөг ялгаврын аргаар дискретчилэн Питон хэл дээр хэрэгжүүлсэн 2-D шууд бодолтын алгоритмыг боловсруулав. Судалгааны хүрээнд төгсгөлөг ялгаврын томъёолол, торон байгууламж, сийрэг матрицын үүсгэлт, комплекс

шугаман системийн шийд болон MT респонс функцийг тооцоолох үндсэн үе шатуудыг системтэйгээр нэгтгэн тайлбарлав.

Боловсруулсан алгоритмын зөв ажиллагааг нэгэн төрлийн хагас орон зайн аналитик шийдэлтэй харьцуулан баталгаажуулав. Үр дүнгээс гадаргын ойролцоох торон нягтрал нь өндөр давтамжийн (богино хугацааны) MT респонсийн нарийвчлалд шийдвэрлэх нөлөөтэй болох нь тогтоогдов. Жигд тор ашигласан үед төлөөллийн эсэргүүцэл болон фазын тооцоололд мэдэгдэхүйц алдаа ажиглагдсан бол гадаргын ойролцоо нягтруулсан жигд бус тор ашигласнаар аналитик шийдэлтэй маш сайн нийцэж, тоон алдааг эрс бууруулсан. Үүний зэрэгцээ жигд бус тор нь үл мэдэгдэхийн тоо, санах ойн хэрэглээ болон нийт тооцооллын хугацааг мэдэгдэхүйц багасгаж, тооцооллын үр ашгийг нэмэгдүүлэв.

Энэхүү ажил нь MT шууд бодолтын үндсэн физик, төгсгөлөг ялгаврын дискретчлал болон алгоритмын хэрэгжилтийг нэг дор нэгтгэн тайлбарлаж, судалгаа болон сургалтын зориулалтаар ашиглах боломжтой модульчилсан суурь хэрэгжилтийг бүрдүүлсэнээрээ ач холбогдолтой. Боловсруулсан алгоритмуудыг

PyMT_tools багцын **PyMT2D** модульд нэгтгэн хөгжүүлж байгаа бөгөөд энэ нь цаашид синтетик туршилт, MT өгөгдлийн шууд бодолт болон шинэ алгоритм боловсруулах үндсэн хүрээ болж ашиглагдах боломжтой.

Цаашдын судалгаанд энэхүү суурь хэрэгжилтийг олон давхаргат болон хоёр хэмжээст нийлмэл геоцахилгаан орчин, газрын гадаргын рельеф, цахилгаан анизотроп орчин, түүнчлэн гурван хэмжээст загварчлал болон MT урвуу бодлогын алгоритмд өргөтгөн хөгжүүлэхээр төлөвлөж байна.

VII. Кодын хүртээмж

Энэхүү өгүүлэлд боловсруулсан PyMT2D модуль нь **PyMT_tools** төслийн нэг хэсэг бөгөөд хөгжүүлэлтийн эх кодыг зохиогчийн GitHub хуудсанд хадгалж байна.

[https://github.com/bmagnai0319-](https://github.com/bmagnai0319-ux/PyMT_Tools)

[ux/PyMT_Tools](https://github.com/bmagnai0319-ux/PyMT_Tools) Кодыг судалгааны зориулалтаар ашиглах боломжтой бөгөөд цаашид хэрэглэгчийн баримтжуулалт болон жишээ өгөгдлийн хамт нээлттэй хэлбэрээр нийтлэхээр төлөвлөж байна.

НОМ ЗҮЙ

- [1] Simpson, F., Bahr, K., "Practical Magnetotellurics," Cambridge University Press, 2005. [doi:10.1017/CBO9780511614095]
- [2] Cagniard, L., "Basic theory of the magnetotelluric method of geophysical prospecting," *Geophysics* 18(3), 605–635, 1953. [doi:10.1190/1.1437915]
- [3] Vozoff, K., "The magnetotelluric method," in *Electromagnetic Methods in Applied Geophysics*, SEG, 641–711, 1991. [doi:10.1190/1.9781560802686.ch8]
- [4] Chave, A. D., Jones, A. G., "The Magnetotelluric Method: Theory and Practice," Cambridge University Press, 2012. [doi:10.1017/CBO9781139020138]
- [5] Berdichevsky, M. N., Dmitriev, V. I., "Models and Methods of Magnetotellurics," Springer, 2008. [doi:10.1007/978-3-540-77814-1]
- [6] Ward, S. H., Hohmann, G. W., "Electromagnetic theory for geophysical applications," in *Electromagnetic Methods in Applied Geophysics*, SEG, 131–311, 1988. [doi:10.1190/1.9781560802631.ch4]
- [7] Newman, G. A., Alumbaugh, D. L., "Three-dimensional magnetotelluric inversion using non-linear conjugate gradients," *Geophysical Journal International* 140, 410–424, 2000. [doi:10.1046/j.1365-246X.2000.00072.x]
- [8] Key, K., "MARE2DEM: a 2-D inversion code for controlled-source electromagnetic and magnetotelluric data," *Geophysical Journal International* 207, 571–588, 2016. [doi:10.1093/gji/ggw290]
- [9] Smith, J. T., "Conservative modeling of 3-D electromagnetic fields, part I: Properties and error analysis," *Geophysics* 61, 1308–1318, 1996. [doi:10.1190/1.1444054]
- [10] Dey, A., Morrison, H. F., "Resistivity modeling for arbitrarily shaped two-dimensional structures," *Geophysics* 44, 753–780, 1979. [doi:10.1190/1.1440975]
- [11] Egbert, G. D., Kelbert, A., "Computational recipes for electromagnetic inverse problems," *Geophysical Journal International* 189, 251–267, 2012. [doi:10.1111/j.1365-246X.2011.05347.x]
- [12] Kelbert, A., Meqbel, N., Egbert, G. D., Tandon, K., "ModEM: A modular system for inversion of electromagnetic geophysical data," *Computers & Geosciences* 66, 40–53, 2014. [doi:10.1016/j.cageo.2014.01.010]
- [13] Grayver, A. V., Kolev, T. V., "Large-scale 3-D geoelectromagnetic modeling using modern computational frameworks," *Geophysics* 80, E277–E291, 2015. [doi:10.1190/geo2014-0499.1]
- [14] Constable, S. C., Parker, R. L., Constable, C. G., "Occam's inversion: A practical algorithm for generating smooth models from electromagnetic sounding data," *Geophysics* 52, 289–300, 1987. [doi:10.1190/1.1442303]
- [15] Siripunvaraporn, W., Egbert, G., "WSINV3DMT: Vertical magnetic field transfer function inversion and parallel implementation," *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 173, 317–329, 2009. [doi:10.1016/j.pepi.2009.01.013]
- [16] Avdeev, D. B., "Three-dimensional electromagnetic modelling and inversion from theory to application," *Surveys in Geophysics* 26, 767–799, 2005. [doi:10.1007/s10712-005-1836-x]
- [17] Mackie, R. L., Madden, T. R., "Three-dimensional magnetotelluric inversion using conjugate gradients," *Geophysical Journal International* 115, 215–229, 1993. [doi:10.1111/j.1365-246X.1993.tb05597.x]
- [18] Rodi, W., Mackie, R. L., "Nonlinear conjugate gradients algorithm for 2-D magnetotelluric inversion," *Geophysics* 66, 174–187, 2001. [doi:10.1190/1.1444893]
- [19] Pek, J., Verner, T., "Finite-difference modelling of magnetotelluric fields in two-dimensional structures," *Studia Geophysica et Geodaetica* 41, 179–197, 1997. [doi:10.1023/A:1023323005686]
- [20] Palacky, G. J., "Resistivity characteristics of geologic targets," in *Electromagnetic Methods in Applied Geophysics*, SEG, 53–129, 1988. [doi:10.1190/1.9781560802631.ch2]
- [21] Kaufman, A. A., Keller, G. V., "Frequency and Transient Soundings," Elsevier, 1983.
- [22] Zhdanov, M. S., "Geophysical Electromagnetic Theory and Methods," Elsevier, 2009. [doi:10.1016/B978-044452748-6.X5001-3]
- [23] Morton, K. W., Mayers, D. F., "Numerical Solution of Partial Differential Equations," Cambridge University Press, 2005. [doi:10.1017/CBO9780511811203]
- [24] Strikwerda, J. C., "Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations," SIAM, 2004. [doi:10.1137/1.9780898717938]

- [25] van der Vorst, H. A., "Bi-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems," SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing 13, 631–644, 1992. [doi:10.1137/0913035]
- [26] Saad, Y., Schultz, M. H., "GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems," SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing 7, 856–869, 1986. [doi:10.1137/0907058]
- [27] Benzi, M., "Preconditioning techniques for large linear systems: A survey," Journal of Computational Physics 182, 418–477, 2002. [doi:10.1006/jcph.2002.7176]
- [28] Haber, E., "Computational Methods in Geophysical Electromagnetics," SIAM, 2014. [doi:10.1137/1.9781611973808]
- [29] Saad, Y., "Iterative Methods for Sparse Linear Systems," SIAM, Philadelphia, 2003. <https://doi.org/10.1137/1.9780898718003>
- [30] Trottenberg, U., Oosterlee, C. W., Schuller, A., "Multigrid," Academic Press, 2000.
- [31] Jackson, J. D., "Classical Electrodynamics," Wiley, 1999. <https://doi.org/10.1002/9783527618156>
- [32] Stratton, J. A., "Electromagnetic Theory," McGraw-Hill, 1941.
- [33] Cheng, D. K., "Field and Wave Electromagnetics," Addison-Wesley, 1989.
- [34] Farquharson, C. G., Oldenburg, D. W., "Non-linear inversion using general measures of data misfit and model structure," Geophysical Journal International 134, 213–227, 1998. <https://doi.org/10.1046/j.1365-246X.1998.00555.x>
- [35] Li, Y., Oldenburg, D. W., "3-D inversion of magnetotelluric data," Geophysics 65, 1931–1945, 2000. <https://doi.org/10.1190/1.1444877>
- [36] Enkhzul, Bayartogtokh, Batmagnai Erdenechimeg and Tserendug Shoovdor. "Investigation of the electrical resistivity structure of the subsurface at Mogod valley in central Mongolia: Insight is using 1D Magnetotelluric inversion." *Mongolian Geoscientist* 27.54 (2022): 20-33. <https://doi.org/10.5564/mgs.v27i54.1810>
- [37] Erdenechimeg, Batmagnai, and Alexey Kuvshinov. "Magnetotelluric studies in Mongolia: Progress status and outlook." *Mongolian Geoscientist* 30.61 (2025): 33-52. <https://doi.org/10.5564/mgs.v30i61.3906>

ХАВСРАЛТ А. PyMT_tools багцын үндсэн алгоритмууд

Энэхүү хавсралтад PyMT_tools багцын 2-D MT шууд бодолтын үндсэн дэд алгоритмуудыг үзүүлэв. Эдгээр алгоритмууд нь үндсэн өгүүллийн IV бүлэгт тайлбарласан ерөнхий ажлын дарааллын дэлгэрэнгүй хэрэгжилтийг харуулж байгаа бөгөөд программын модульчилсан бүтцийг ойлгоход зориулагдсан болно.

Дээрх алгоритмууд нь PyMT_tools багцын үндсэн модулиудын логик бүтэц бөгөөд цаашид 1-D, 2-D болон 3-D MT загварчлал, урвуу бодлого, параллель тооцоолол зэрэг шинэ боломжуудыг нэмэхэд өргөтгөх боломжтойгоор зохион байгуулагдсан.

Numerical Modelling in Geophysics I: A Two-Dimensional Solution of Electromagnetic Induction Equations Using the Finite Difference Method

Batmagnai Erdenechimeg^{a*}

*a – Department of Geomagnetic, Institute of Astronomy and Geophysics,
Mongolian Academy of Sciences*

**batmagnai@iag.ac.mn*

ABSTRACT

Electromagnetic induction provides a fundamental physical basis for imaging the electrical conductivity structure of the Earth's crust and mantle. In this study, we derive the governing equations for two-dimensional electromagnetic field modelling from Maxwell's equations and formulate them within the finite difference method. Under the quasi-static approximation, appropriate for geophysical frequencies, the displacement current is neglected, simplifying the coupled electromagnetic system in the frequency domain. Assuming a 2-D Earth, the problem is decomposed into transverse electric and transverse magnetic modes, each governed by a scalar Helmholtz-type equation. These equations are subsequently discretized on a structured grid using central finite difference schemes, resulting in a system of linear algebraic equations suitable for numerical implementation. The presented formulation establishes a rigorous theoretical foundation for forward modelling of electromagnetic responses, particularly in magnetotelluric (MT) applications. This work serves as a basis for subsequent developments in numerical implementation, mesh design, and inversion frameworks for complex geo-electrical structures.

Keywords: Electromagnetic induction, Magnetotellurics, Finite difference method, 2-D forward modelling.