Бозе-Эйнштейний конденсатад үүсэх хуйлралыг псевдоспектрийн аргаар тооцоолох

О.Сүх , Г.Зоригт, Л.Хэнмэдэх, Ч.Алдармаа

[1]*ШУТИС, Хэрэглээний Шинжлэх Ухааны Сургууль, Физикийн тэнхим*

Хураангуй

Энэхүү судалгааны ажилд хэт нам температурт гармоник соронзон занганд байгаа бозон хийд хуйлрал үүсэх процессыг IV эрэмбийн хугацааны хуваагдалтай псевдоспектрийн тоон аргаар шийдлээ. Бозе-Эйнштейны конденсатад (БЕК) хуйлралыг үүсгэхдээ соронзон зангаа тодорхой давтамжтай эргүүлэх ба бөөмийн тооноос хамааран хуйлрал үүсэх критик давтамж болон стационар төлөвийн энергийн утгуудыг тооцоолсон үр дүнг танилцуулна.

Түлхүүр үг : Гросс-Питаевскийн тэгшитгэл, критик эргэлтийн өнцөг хурд, өргөтгөсөн Лагеррын функц, Фурьегийн задаргаа, хугацааны IV эрэмбийн хуваалт.

ОРШИЛ

Шингэрүүлсэн бозе атомын хийд Бозе-Эйнштэйний конденсатийг үүсгэсэн нь онолын судалгааг эрчимжүүлсэн. 1995 оноос хэт хөрсөн атомын хийг судлах олон тооны судалгааны ажил гарсан бөгөөд бозон болон фермион аль алиных нь хувьд шингэрүүлсэн хийнээс конденсатийг гаргаж авсан. Соронзон занган дахь хэт хөрсөн бозоны хий нь онцгой шинж чанартай бөгөөд олон сонирхолтой физик үзэгдэлд хүргэдэг. Эдгээр үзэгдлийн нэг нь БЕК-д хуйлрал үүсэх юм. Олон судалгааны баг БЕК-д квантлагдсан хуйлрал үүсэхийг туршилтаар харуулсан. Жишээлбэл: Колорадогийн их сургуулийн JILA групп [1], ENS групп [2] болон Корнеллийн их сургуулийн MIT групп [3]. Квант хуйлралыг үүсгэх хэд хэдэн арга байдгаас анхдагч хоёрыг дурьдвал занганд байгаа атомыг эргэж байгаа лазерын гэрлээр шарж гармоник анизотроп потенциалын үүсгэх, стационар занганд дахь конденсатад өндөр давтамжтай лазерын Гауссын хэлбэртэй потенциалиар үүсгэдэг. БЕК-д квантлагдсан хуйлрал үүсгэх туршилтын болон онолын судалгаа одоо ч эрчимтэй хийгдэж байна. БЕК-ийн үндсэн төлөвт квантлагдсан хуйлрал үүсгэх бас нэг арга бол атомуудыг хашсан соронзон зангыг тодорхой өнцгийн хурдаар эргүүлэх арга юм [4,5]. Критик температураас хангалттай бага T_C температурт эргэлдэж байгаа занган дахь конденсатийн төлөв нь макро долгионы функцийн Гросс- Питаевскийн тэгшитгэл буюу шугаман бус Шредингерийн тэгшитгэлээр илэрхийлэгддэг [6]. Үүнд зангаы потенциал, эргэлтийн энерги атом хоорондын харилцан үйлчлэлийг тооцно. Харилцан үйлчлэл нь дундаж орноор тодорхойлддог ба Гросс-Питаевскийн тэгшитгэлд шугаман бус гишүүнийг үүсгэнэ. БЕК-д үүссэн хуйлралын стационар төлөв ба түүний динамикийн талаар саяхан хийгдсэн хэд хэдэн тоон судалгаа байдаг. Эргэж байгаа БЕК-д шилжсэн давтамжтай (цэнхэр өнгө уруу) Гауссын лазераар хутгаж үүсгэсэн хуйлралын динамикыг Бао нар судалсан [7]. Афталион болон Ду [5] Томас-Ферми (TF) нар хагас классик горимд үндсэн төлөв, критик өнцгийн хурд болон энергийн утгыг тоон болон асимптотик байдлаар судалсан. Энэхүү ажлын зорилго нь эргэлдэж буй соронзон занган дахь БЕК-д үүссэн хуйлралуудын энерги ба химийн потенциалыг тооцсон. Эргэлтийн өнцөг хурд нь критик утгаас их үед хуйлрал үүснэ [5, 8, 9].

ОНОЛ

Гросс-Питаевскийн тэгшитгэлийг тэгш өнцөгт координатын системд бичвэл:

Холбоо барих: aldarmaa@must.edu.mn

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,y,z,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi(x,y,z,t)$$
$$+\frac{m}{2}\left(\omega_x^2x^2+\omega_y^2y^2+\omega_z^2z^2\right)\psi(x,y,z,t)$$
$$-i\hbar\Omega\left(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\right)+N|\psi(x,y,z,t)|^2\psi(x,y,z,t) \quad (1)$$

Дээрх тэгшитгэлийг нэгжгүй хувьсагчдаар илэрхийлэхийн тулд хоёр талыг $\hbar\omega_m$ –д хуваая. ω_m –нь $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ ийн бага утга нь болно. Бидний зорилго онолын тооцоогоор конденсатад хуйлрал үүсгэхийн тулд ГП тэгшитгэлийн Гамильтонианд эргэлтийн операторыг оруулж өгсөн. Үүний үр дүнд конденсатад хуйлралууд үүснэ. Иймд гурван хэмжээст тэгшитгэлд тодорхой нөхцлийг тооцон хоёр хэмжээст эффиктив тэгшитгэлд хувиргасан. $\omega_m = \omega_x \approx \omega_y \ll \omega_z$ үед хугацаа өөрчлөгдөхөд z тэнхлэгийн дагуух энерги $\hbar\omega_z$, x ба y дагуух өдөөлтийн энергитэй харьцуулахад хангалттай их байна. Иймээс z тэнхлэгийн дагуух конденсатын долгионы функц үндсэн төлөвийн функцээр тодорхойлогдоно. Иймээс $\psi(x,y,z,t)$ долгионы функцийг $\psi(x,y,t)$ ба $\psi_g(z)$ функцүүдийн үржвэрт бичиж болно. Энэ функцийг (1) тэгшитгэлд орлуулж, зүүн талаас нь $\psi_g^*(z)$ үржүүлж $(-\infty,\infty)$ мужаар z-ээр интеграл авбал дараах нэгжгүй хоёр хэмжээст тэгшитгэл гарна.

$$i\frac{\partial\psi(x,y,t)}{\partial t} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi(x,y,t) +$$
$$\frac{1}{2}(x^2+y^2)\psi(x,y,t) - i\left(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x,y,t) +$$
$$\beta|\psi(x,y,t)|^2\psi(x,y,t) \quad (2)$$

Хугацаа ба координат, харилцан үйлчлэлийн энергид дараах хэмжээсүүдийг тооцож нэгжгүй хувьсагчдаар илэрхийлье: $\omega_x t = \tau$, $\sqrt{\frac{m\omega_x}{\hbar}}x = \tilde{x}$, $\sqrt{\frac{m\omega_y}{\hbar}}y = \tilde{y}$ $g = \frac{\omega_z}{\omega_x}$; $\beta = \frac{NU_0}{\hbar\omega_x}$

Үүнд: $U_0 = \frac{4\pi\,\hbar^2 a}{m}$, a- сарнилын урт.

Удаан бөөмсийн сарнилын онолд сарнилын урт гэдэг ойлголт байдаг. Энэ нь уртын нэгжтэй харилцан үйлчлэлийг илэрхийлэх хэмжигдэхүүн юм. Сарнилын урт нэмэх тэмдэгтэй байхад түлхэлцэл, хасах тэмдэгтэй үед таталцлыг илэрхийлнэ. Иймээс харгалзан конденсатын атомууд төвөөс холдон тархах ба төврүү тэмүүлж шигүү болох үзэгдэл ажиглагдана.

Тэгш өнцөгт координатын системд эргэлтийн буюу импульсийн моментын операторын $i\hbar\Omega\left(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\right)$ уламжлалын өмнө хувьсагч байгаа нь бодолтыг хийхэд төвөгтэй болгодог. Иймээс туйлын координатад (эргэлтийн оператор $i\hbar\Omega\frac{\partial}{\partial\theta}$ хэлбэртэй) бодлогыг бодох нь тохиромжтой.

Хоёр хэмжээст эргэж байгаа БЕК-д өргөтгөсөн Лагерр-Фурьегийн псевдоспектрийн аргыг хэрэглэе. Хоёр хэмжээст тохиолдолд (r,θ) туйлын координатыг хэрэглэнэ. Туйлын координат-д эргэлтийн оператор бүхий Шредингерийн тэгшитгэл нь дараах хэлбэртэй [10].

$$i\frac{\partial\psi(\mathrm{r},\theta,t)}{\partial t} = \left[-\frac{1}{2r}\frac{\partial}{\partial t}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)-\frac{1}{2r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{1}{2}\gamma_r^2r^2+ i\Omega\partial_\theta\right]\psi(\mathrm{r},\theta,t) \quad (3)$$

Захын нөхцөл:

$$\psi(\mathrm{r},\theta+2\pi,t)=\psi(\mathrm{r},\theta,t),\ \ 0<\theta<2\pi$$
$$\lim_{r\to 0}\psi(\mathrm{r},\theta,t) = 0,\ 0<r<\infty$$

Нормчлолын нөхцөл:

$$\int_0^\infty\int_0^{2\pi}|\psi(\mathrm{r},\theta,t)|^2r\,dr\,d\theta \quad = 1$$

Эдгээр нөхцөлүүдээс тэгшитгэлийн шийд нь $r=0$ цэгт нөхцөл шаардахгүйгээр нэгэн утгатай бодогдоно. $B_\perp$- шугаман операторыг авч үзье.

$$B_\perp\left(g(r)e^{im\theta}\right) = \left[-\frac{1}{2r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)-\frac{1}{2r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{1}{2}\gamma_r^2r^2+i\Omega\partial_\theta\right]g(r) = e^{im\theta}\left[-\frac{1}{2r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{m^2}{2r^2}+\frac{1}{2}\gamma_r^2r^2-m\Omega\right]g(r) \coloneqq B_r^{|m|}\left(g(r)\right)e^{im\theta} - m\Omega g(r)e^{im\theta} \quad (4)$$

Үүнд:

$$B_r^{|m|}\,g(r) = \left[-\frac{1}{2r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{|m|^2}{2r^2}+\frac{1}{2}\gamma_r^2r^2\right]g(r) \quad (5)$$

буюу эндээс $B_r^{|m|}$-ийн хувийн функцүүдийг олж болно. Өргөтгөсөн Лагеррын функц $L_k^m(r)$ нь дараах тэгшитгэлийн шийд болно.

$$\left(r\frac{\partial^2}{\partial r^2}+(m+1-r)\frac{\partial}{\partial r}\right)\hat{L}_k^m(r)+k\hat{L}_k^m(r) = 0 \quad (6)$$
$$k = 0,1,\ 2,\ \ldots,$$

Лагеррын функцийн ортогоналын нөхцөл нь дараах хэлбэртэй байна.

$$\int_0^\infty r^me^{-r}\hat{L}_k^m(r)\hat{L}_{k'}^m(r)dr = C_k^m\,\delta_{kk'} \quad (7)$$

Гармоник потенциалтай Шредингерийн тэгшитгэлийн шийдийг өргөтгөсөн Лагеррын функцийг ашиглан дараах хэлбэртэй бичье.

$$L_k^m(r) = \frac{\gamma_r^{(m+1)/2}}{\sqrt{\pi C_k^m}} r^m e^{-\gamma_r r^2/2} \hat{L}_k^m(\gamma_r r^2) \qquad (8)$$

Энэ өргөтгөсөн Лагеррын функц нь дараах тэгшитгэлийн шийд болно.

$$B_r^m L_k^m(r) = \left[-\frac{1}{2r}\frac{\partial}{\partial t}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{m^2}{2r^2} + \frac{1}{2}\gamma_r^2 r^2\right] L_k^m(r) = [\gamma_r(2k+m+1)] L_k^m(r) \quad (9)$$

Эндээс $\{L_k^m\}_{k=}^{\infty}0$ нь $B_r^{|m|}$ шугаман операторын хувийн функцүүд болох нь харагдана. Дараах математик үйлдэлээс $L_k^{|m|}(r)e^{im\theta}$ нь $B_\perp$ - операторын хувийн функц болохыг харж болно.

$$B_\perp\left(L_k^{|m|}(r)e^{im\theta}\right) = \left(B_r^{|m|}L_k^{|m|}(r)\right)e^{im\theta} - m\Omega\, L_k^{|m|}(r)e^{im\theta} = [\gamma_r(2k+|m|+1) - m\Omega]\left(L_k^{|m|}(r)e^{im\theta}\right) = \mu_{km}\, L_k^{|m|}(r)e^{im\theta} \qquad (10)$$

Иймээс тэгшитгэлийн шийдийг дараах хэлбэртэй хайна.

$$\psi(\mathrm{r},\theta,t) = \sum_{m=-M/2}^{\frac{M}{2}-1}\left[e^{im\theta}\sum_{k=0}^{K+\frac{M}{2}+1}\hat{\psi}_{km}(t)\, L_k^{|m|}(r)\right]$$

$\mu_{km} = [\gamma_r(2k+|m|+1) - m\Omega]$ энэ нь хувийн утга юм. Стационар төлөвийг тооцоолохын тулд Гросс- Питаевскийн тэгшитгэлийн шийдийг $\Psi(x)e^{-i\,\mu t}$ хэлбэртэй хайдаг. Үүнийг орлуулан

$$\boldsymbol{\mu\psi(\mathrm{r},\theta)} = \left[-\frac{1}{2}\nabla_{\theta,r}^2 + \frac{1}{2}\gamma_r^2 r^2 + \beta|\psi|^2 + i\Omega\partial_\theta\right]\boldsymbol{\psi(\mathrm{r},\theta)} \qquad (11)$$

Тэгшитгэлийн хоёр талыг $\boldsymbol{\Psi}^*$ интеграл авч $\boldsymbol{\mu}$ химийн потенциалийг олно.

$$\boldsymbol{\mu} = \int\left(\frac{1}{2}\psi^*\nabla_{\theta,r}^2\psi + \psi^*\frac{1}{2}\gamma_r^2 r^2\psi + \beta|\psi|^4\right) r\,dr\,d\theta \qquad (12)$$

Хугацааны хуваалттай аргаар хоёр хэмжээст Гросс- Питаевскийн тэгшитгэлийг бодохдоо Гамильтонианыг шугаман ба шугаман бус хоёр гишүүний нийлбэрт бичнэ.

$$H = H_1 + H_2 \qquad (13)$$

$$H_1 = \beta|\Psi|^2, \quad H_2 = -\frac{1}{2}\nabla^2 + V(r) \qquad (14)$$

$|\psi|^2 = const$ учраас $i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \beta\,|\psi|^2\,\psi$ тэгшитгэл $\psi = \psi_0 e^{-i\,\beta|\Psi|^2 t}$ (15) гэж шууд интегралчлагдана. Одоо $e^{-i\,\hat{H}_2 t}$ шууд бодогдох тохиромжтой аргыг олох шаардлагатай. H_2 нь шугаман оператор учраас H_2 –ийн хувийн утгуудыг спектр баз болгон авбал $e^{-i\,\hat{H}_2 t}$ нь шууд бодогдоно.

t - эгшин дэх шийдийг $\Psi(\mathrm{r},\theta,t)$ гэвэл $t+\Delta t$ эгшин дэх шийдийг дараах байдалтай олно.

$$\Psi(\mathrm{r},t+\Delta t) = \Psi(r)\, e^{-iH\Delta t} = \Psi(r)\, e^{-i(\mathrm{H}_1+H_2)\Delta t} \qquad (16)$$

Дөрөвдүгээр эрэмбийн хугацааны нарийвчлалтай үед

$$\Psi(\mathrm{r},t+\Delta t) = \Psi(r,t)\, e^{-i2w_1H_1\Delta t}e^{-i2w_2H_2\Delta t} e^{-i2w_3H_1\Delta t}e^{-i2w_4H_2\Delta t}e^{-i2w_3H_1\Delta t} e^{-i2w_2H_2\Delta t}e^{-i2w_1H_1\Delta t} \qquad (17)$$

гэж бичнэ. Энэ нь хугацааны IV эрэмбийн симплект интегралчлал авах үеийн жингийн коэффициентууд:

$$\omega_1 = 0.33780179798991440851,$$

$$\omega_2 = 0.67560359597982881702$$

$$\omega_3 = -0.08780179798991440851$$

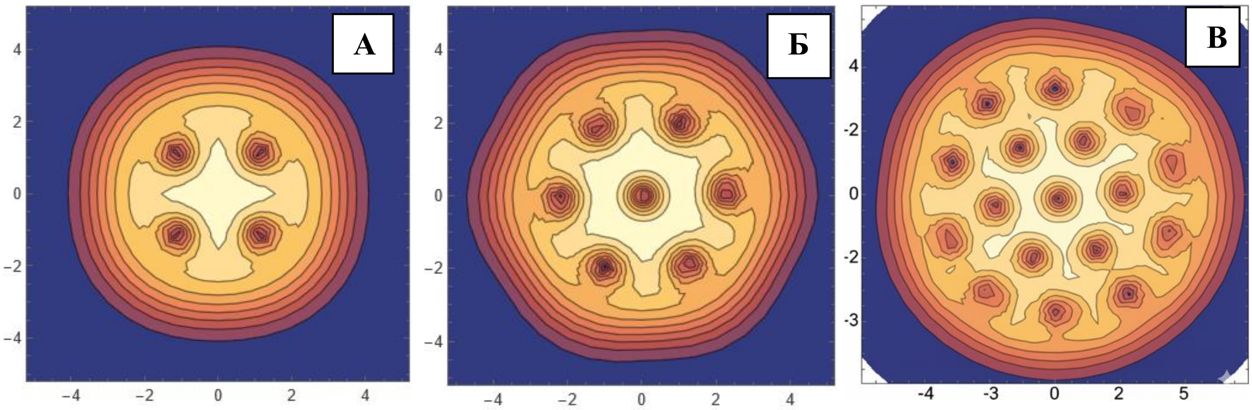
$$\omega_4 = -0.85120719795965763405$$

IV эрэмбийн хугацааны хуваалттай псевдоспектрийн арга нь шууд бодогдох ба спектрийн нарийвчлалтай, хугацааны хувьд IV эрэмбийн нарийвчлалтай байдаг [9-12].

ТООЦООЛЛЫН ҮР ДҮН

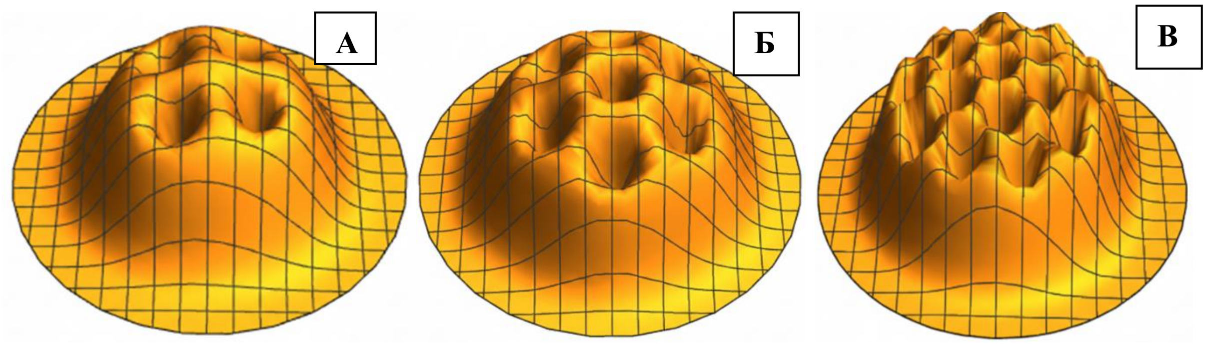
Энэ ажилд хугацааны хуваалттай өргөтгөсөн Лагерр-Фурьегийн псевдоспектрийн аргаар эргэж байгаа Бозе-Эйнштейний конденсатад хуйлрал үүсэхийг хоёр хэмжээстэй тохиолдолд бодсон. Гамильтонианд импульсын моментын операторыг оруулж эргэх хөдөлгөөнийг тооцсон. Тэгш өнцөгт координатын системд импульсын моментын операторын уламжлалын өмнөх коэффициент хувьсах байдаг бол туйлын координатад коэффициент тогтмол тоо байдаг учраас тооцоог туйлын координатын системд хийсэн. Мөн тоон интегралыг оновчтой цэгүүдийг ашиглан Гауссын квадратураар бодож байгаа ба захын цэгийн утгад хязгаарлалт байхгүй.

Бид диск хэлбэртэй конденсатийн төлөвүүдийг тооцоолсон. Эргэлтийн өнцөг хурд нь $\omega > \Omega_c$ нөхцөлийг хангасан үед БЕК -д хуйлрал үүснэ [9]. Хуйлрал үүсэх Ω_c эргэлтийн өнцөг хурдны критик утгуудыг симуляциас тодорхойлно. Хугацаанаас хамаарсан Гросс-Питаевскийн тэгшитгэлийн хамгийн бага энергийн төлөвт харгалзах шийдийг олохын тулд бид хуурмаг хугацааны аргыг ашигласан. Хугацааны бодолтыг эхлүүлэхийн тулд анхны функцүүдийг сонгох шаардлагатай.



Зураг 1. *Хуйлралтай конденсатийн* стационар төлөвийн нягт $|\psi(x,y)|^2$

(А. $\Omega = 0.7$*, Б.* $\Omega = 0.8$, В. $\Omega = 0.95$ *)*



Зураг 2. Хуйлралтай конденсатийн долгион функцын нягтын гадарга.

(*А.* $\Omega = 0.7$*, Б.* $\Omega = 0.8$, В. $\Omega = 0.95$)

Энэ тохиолдолд анхны функцүүд нь гармоник потенциалтай шугаман Шредингерийн тэгшитгэлийн шийд болно. Бао нар тасралтгүй нормчлагдсан градиент урсгалыг ашиглан Эйлерийн урвуу төгсгөлөг ялгаврын аргаар бодсон [9]

Эргэлтийн өнцөг хурдыг 0.5-аас 0.95 болгон нэмэгдүүлж, бөөмийн тоо β-г 100 байхаар сонгож, тооцооллыг Wolfram Mathematica програмыг ашиглан хугацааг 0.009-0.3 алхамтайгаар тооцоолсон. Энэ үр дүнг Bao нарын [9] ажлын үр дүнтэй харьцуулсан. Хуйлралтай конденсатийн энерги ба химийн потенциалын утгыг 1-р хүснэгтэд харуулав

Тогтмол β-ийн хувьд Ω нь 0.5-аас 0.95 хүртэл нэмэгдэхэд стацианор төлөвийн энерги болон химийн потенциалууд багасдаг. Зурагт 1-т стацианор төлөвийн конденсатийн нягтыг контураар харуулсан ба Зураг 2-т долгион функцын нягтыг гадаргуug харуулав.

Үндсэн төлөвийн долгионы функцийг анхны функцээр сонгосон тооцоололын химийн потенциал болон энергийг 1-р хүснэгтэд үзүүлэв. Конденсатийн төвийг тойрон бага нягттай муж буюу хуйлралууд үүсэж, Ω нэмэгдэхийн хэрээр конденсатийн төвийн нягт буурч, хуйлралийн тоо нэмэгдэнэ.

Хүснэгт 1 Хуйлралтай конденсатын стацианор төлөвийн химийн потенциал ба энерги. (β=100)

Ω	**Химийн потенциал**	**Энерги**	
		Бидний тооцоо	Бао нар [9]
0.25	5.90597	4.00368	3.9456
0.5	5.90597	4.00368	3.9456
0.7	4.93583	3.49834	-
0.75	4.75914	3.35501	3.3750
0.80	4.19623	3.00313	3.1980
0.90	3.11318	2.61353	2.6573
0.95	6.9735	2.79646	-

Эргэлтийн өнцөг хурд (Ω≤0.7) бага үед шийд нь 20,000 итерацын дараа нийлнэ. Харин эргэлтийн өнцөг хурдны (Ω≥0.95) үед эргэлтийн гишүүний тооцоо төвөгтэй болж итерацийг 50000 хүртэл ихэсгэсний үр дүнд бодолт нийлж байна.

ДҮГНЭЛТ

Энэ өгүүлэлд соронзон занганд байгаа Бозе-Эйнтейний конденсатад үүсэх хуйлралыг хугацаанаас хамаарсан Гросс-Питаевскийн тэгшитгэлийг хугацааны IV эрэмбийн нарийвчлалтай псевдоспектрийн аргаар тооцоолсон. БЕК-д хуйлрал үүсгэхийн тулд бодолтын итерацыг хангалттай их тоогоор хийх шаардлагатай. Харин IV эрэмбийн нарийвчлалтай тооцооллын үед алхмыг ихэсгэж нарийвчлал сайтай үр дүнд бага хугацаанд хүрсэн. Мөн псевдоспектрийн аргад координатыг дискретлэхдээ оновчтой цэгүүдийг сонгодог учраас бидний өмнө тооцоолсон төгсгөлөг ялгаврын аргаас цөөн цэгт тооцоолсон энэ нь тооцооллын хугацааг багасгасан. Тооцооллын алхам Δt 0.045 - 0.05 болно. Цаашид стационар төлөвийн функцүүдийг ашиглан БЕК дэх динамикийн тооцооллыг хийх боломжтой.

АШИГЛАСАН МАТЕРИАЛ

[1] M. R. Matthews, B. P. Anderson, P. C. Haljan, D. S. Hall, C. E. Wieman and E. A. Cornell, *Vortices in a Bose-Einstein condensate*, Phys. Rev. Lett. **83**, 2498, 1999. (https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.83.2498)

[2] K.W.Madison, F.Chevy,W.Wohlleben, J. Dalibard, *Vortex formation in a stirred Bose-Einstein condensate*, Phys. Rev. Lett. **84**, 806, 2000. (https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.84.806)

[3] C. Raman, J. R. Abo-Shaeer, J. M. Vogels, K. Xu and W. Ketterle, *Vortex nucleation in a stirred Bose-Einstein condensate*, Phys. Rev. Lett. **87**, 210402, 2001. (https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.87.210402)

[4] K. B. Davis, M. O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn and W. Ketterle, *Bose-Einstein condensation in a gas of sodium atoms*, Phys. Rev. Lett. **75**, 3969, 1995. (https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.75.3969)

[5] A. Aftalion and Q. Du, *Vortices in a rotating Bose-Einstein condensate: Critical angular velocities and energy diagrams in the Thomas-Fermi regime*, Phys. Rev. A, **64**, 063603, 2001. (10.1103/PhysRevA.64.063603)

[6] L. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation*, Oxford, New York, Clarendon Press, 2003.

[7] W. Bao and Y. Zhang, *Dynamics of the ground state and central vortec states in Bose-Einstein condensation*, Math. Mod. Meth. Appl. Sci. Volume 3, pp. 57-88, (2005) (https://doi.org/10.1142/S021820250500100X)

[8] E. Lundh, C.J. Pethick and H. Smith, *Vortices in Bose-Einstein condensated atomic clouds*, Phys. Rev. A, 58, 4816-4823, 1998. (https://doi.org/10.1103/PhysRevA.58.4816)

[9] Weizhu Bao, Hanquan Wang and Peter A. Markowich, *Ground, symmetric and central vortex states in rotating Bose-Einstein condensates*, Comm. Math. Sci., Vol. 3, Num.1, Pages 57-58, 2005. (DOI: 10.4310/CMS.2005.v3.n1.a5)

[10] Laudau and E. Lifschitz, Quantum Mechanics: Non-relativistic Theory, Pergamon Press, New York, 1977.

[11] Ч.Алдармаа, Л.Хэнмэдэх, Г.Зоригт Лазерын пульсээр атомыг өдөөх магадлалыг дискрет хувьсагчийн арга болон псевдоспектриал аргаар тооцоолох, МУИС-ийн Физик сэтгүүл 25 (478) 79-82, 2022, DOI:10.22353/physics.v25i478.198

[12] Xiao-Min Tong, Shih-I Chu, Chemical Physics, 7, Volume 217, Issues 2–3, Pages 119-130 (1997), (https://doi.org/10.1016/S0301-0104(97)00063-3)