МУИС-ийн Эрдэм Шинжилгээний Бичиг 224 ФИЗИК (11):19- 20, 2004

Глобалаар сүлэгдсэн төлөв ба конкуренцийн холбоо

Ц. Хос-Очир, Д. Улам-Оргих
МУИС, Физик Электроникийн Сургууль, Онолын Физикийн Лаборатори, E-mail: khos_ochir@yahoo.com

Квант корреляцийг илэрхийлэх хэмжигдэхүүнийг олох нь одоо үед физикчдийн сонирхлыг ихэд татаж байна. Энэ ажилд бид ийм хэмжигдэхүүн болох [1]-д тодорхойлсон глобал сүлэгдлийг [2]-д тодорхойлсон конкуренцитэй эквивалент болохыг баталсан ба энэ нь эдгээр тодорхойлолтыг цааш өргөтгөх боломжийг нээж байна.

Квант корреляци буюу квант төлөвийн сүлэгдсэн чанарыг ямар хэмжигдэхүүнээр тодорхойлж болохыг олох нь квант механикийн орчин үеийн хөгжлийн тулгамдсан асуудлын нэг болно [3]. Энэ асуудал нь зөвхөн хоёр квант битээс (кубит) тогтох системийн хувьд шийдэгдсэн бөгөөд үүнээс олон кубит бүхий тохиолд бүрэн шийдэгдээгүй.

Энэ ажилд бид сэлгэмлийн симметрии төлөвт тодорхойлсон [2] "даяарын конкуренци"-тэй [1]-д тодорхойлсон "глобал сүлэгдэл"-ийг эквивалент болохыг баталж үзүүлнэ. Эхлээд дээрхи хэмжигдхүүнүүдийн тодорхойлолтыг товч дурьдая.

Конкуренци. Квант корреляцийг тоон утгаар илэрхийлдэг бөгөөд өргөн ашиглагддаг хэмжигдэхүүнийг конкуренци [3] гэдэг ба ρ_{AB} нягтын матрицаар өгөгдсөн A,B хос кубитийн холилдсон төлөв (mixed state)-ийн хувьд конкуренци нь

$$C_{\rm mix} = \max\{0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}\} \quad (1)$$

гэж тодорхойлогдоно. Үүний $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4$ нь $\rho_{\rm AB}(\sigma_y \otimes \sigma_y)\rho^*_{\rm AB}(\sigma_y \otimes \sigma_y)$ гэж тодорхойлогдсон эерэг (positive matrix) матрицийн хувийн утгууд болно. σ_y нь Паулын матриц бөгөөд, $*$-оор комплекс хосмогийг тэмдэглэв. Уг тодорхойлолт нь цэвэр төлөвийн хувьд

$$C_{\rm pure} = 2\sqrt{\det \rho_A} \quad (2)$$

гэсэн хялбар томъёонд шилждэг. Энд

$$\rho_A = {\rm Tr_B}\rho_{\rm AB} = \sum_i \langle i_B|\rho_{AB}|i_B\rangle$$

болно. Хоёроос олон бөөмөөс тогтсон системийн квант корреляцийг бодох явдал нь орчин үеийн квант механикийн нэг тулгамдсан асуудал [4] бөгөөд [2] ажилд конкуренцийг олон кубитийн хувьд өргөтгөж "даяарын конкуренци" ба "хосолмол конкуренци" гэдэг ойлголт оруулсан байна.

Даяарын конкуренци. n бөөмөөс тогтсон системийн аль нэг бөөм ба үлдсэн $(n-1)$ бөөмийн хоорондох корреляцийг

$$C_{1,(n\text{-}1)} = C_{\rm pure} = 2\sqrt{\det\rho_A}, \qquad (\rho_A = {\rm Tr_{BC\ldots}}\,\rho) \quad (3)$$

гэж тодорхойлно [2]. Хэрэв системийн бөөмүүд нь хоорондоо үл ялгагдах симметри гэж үзвэл энэ нь бүх бөөмийн буюу даяарын конкуренци болох нь илэрхий: $C_{\rm whole} = C_{1,(n\text{-}1)}$. Мөн $C_{\rm whole} = C_{\rm pure}$ буюу даяарын сүлэгдэлт нь зөвхөн цэвэр төлөвийн хувьд хүчинтэй.

Хосолмол конкуренци. Системийн дурын хоёр бөөмийн хоорондох квант корреляци буюу хосолмол конкуренцийг $C_{\rm pair} = C_{\rm mix}$ $(\rho_{AB} = {\rm Tr}_{CD\ldots}\rho)$ гэж тодорхойлдог [2]. Энэ тодорхойлолт нь цэвэр болон холилдсон аль ч төлөвийн хувьд хүчинтэй.

Конкуренци нь зөвхөн 0 ба 1-ийн хооронд утга авах ба $C = 1$ гэвэл хамгийн их квант корреляцитай, $C = 0$ гэвэл квант корреляцигүй гэсэн үг. Тухайлбал, "Шредингерийн мууран" төлөв (Schrödinger cat state) $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ нь хамгийн их квант корреляцитай төлөв бөгөөд үнэхээр $C_{\rm pair} = C_{\rm whole} = 1$ байна.

Одоо глобал сүлэгдэлтийн тодорхойлолтыг авч үзье. Бичиглэлийг хялбарчлахын тулд, дараах тэмдэглэгээнүүдийг хэрэглэв. Үүнд, кубитийн суурь векторыг тэг ба нэгээр $|0\rangle \equiv |\uparrow\rangle \equiv |\circlearrowleft\rangle$, $|1\rangle \equiv |\downarrow\rangle \equiv |\circlearrowright\rangle$ гэж индекслээд n кубитээс тогтох системийн долгион векторыг $|b_1\rangle \otimes \cdots \otimes |b_n\rangle = |b_1 \ldots b_n\rangle = |\sum_{i=1}^n b_i 2^{i-1}\rangle = |x\rangle$, $b_i \in \{0,1\}$ гэж аравтын тоон сууриар хялбарчлан тэмдэглэнэ. Жишээлбэл, $|0\rangle \otimes |1\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |1\rangle = |01001\rangle = |0\cdot 2^0 + 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^2 + 0\cdot 2^3 + 1\cdot 2^4\rangle = |9\rangle$ гэх мэт.

Глобал сүлэгдэлт. Төлөвийн квант корреляцийг тодорхойлох хэмжигдэхүүн болох глобал сүлэгдэлтийг [1] ажилд тодорхойлсон. n кубитийн долгионы функц нь Гильбертийн $(C^2)^{\otimes n}$ огторгуйд суурь үүсгэгч $|b_1 \ldots b_n\rangle, b_j \in \{0,1\}$ гэсэн 2^n ширхэг n бит вектороор задарна. Ямар нэг $b \in \{0,1\}$ -ийн хувьд, n бит векторыг $(n-1)$ бит векторт хувиргадаг $A_j(b)$ операторыг

$$A_j(b)|b_1 \ldots b_n\rangle = \delta_{bb_j}|b_1 \ldots \widehat{b}_j \ldots b_n\rangle. \quad (4)$$

гэж тодорхойлно [1]. Энд δ_{bb_j} нь Кронекерийн тэмдэгт, $\widehat{b}_j$ тэмдэглэгээ нь харгалзах b_j тоо нь орхигдсон гэсэн үг. Өөрөөр хэлбэл, A_j оператор нь $(C^2)^{\otimes n}$ огторгуйг $(C^2)^{\otimes n-1}$ гэсэн огторгуйд булгаж байгаа бөгөөд уг $(C^2)^{\otimes n-1}$ огторгуйд тодорхойлогдох дурын хоёр $|u\rangle$, $|v\rangle$ векторыг

$$|u\rangle = \sum u_x|x\rangle, \qquad |v\rangle = \sum v_y|y\rangle \quad (5)$$

$(0 \leq x, y \leq 2^{n-1})$ гэж тоон суурьт задалж болно. Өгөгдсөн $|\psi\rangle \in (C^2)^{\otimes n}$ долгион вектороор тодорхойлогдох төлөвийн квант корреляцийг илэрхийлэх шинэ хэмжигдэхүүнийг [1] ажилд

$$Q(\psi) \equiv \frac{4}{n}\sum_{j=1}^{n} D(A_j(0)\psi, A_j(1)\psi), \qquad (6)$$

$$D(u,v) \equiv \sum_{x<y} |u_x v_y - u_y v_x|^2 \qquad (7)$$

гэж тодорхойлсон бөгөөд энэ $Q(\psi)$ хэмжигдэхүүнийг глобал сүлэгдэлт гэнэ.

Дээрх тэмдэглэгээ ба тодорхойлолтыг ойлгомжтой болгох үүднээс жишээн дээр тодруулъя. 4 кубитээс тогтох системийн долгионы вектор

$$|\psi\rangle = a(|0011\rangle + |0101\rangle + |0110\rangle + |1001\rangle + |1010\rangle + |1100\rangle), \qquad a = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

гэж өгөгдсөн байг. Тодорхойлолт (4) ёсоор:

$$\begin{aligned} A_2(0)|\psi\rangle &= a\delta_{00}(|0\hat{0}11\rangle + |1\hat{0}10\rangle + |1\hat{0}01\rangle) + \\ & a\delta_{01}(|0\hat{1}01\rangle + |0\hat{1}10\rangle + |1\hat{1}00\rangle) = \\ & a(|011\rangle + |110\rangle + |101\rangle) \end{aligned}$$

Үүнчлэн,

$$A_i(0)|\psi\rangle = a(|3\rangle + |5\rangle + |6\rangle),$$
$$A_i(1)|\psi\rangle = a(|1\rangle + |2\rangle + |4\rangle) \quad (i = \overline{1,4}).$$

$(C^2)^{\otimes n-1}$ огторгуйд тодорхойлогдсон $|u\rangle = A_i(0)|\psi\rangle = \sum_{x=0}^{2^3-1} u_x|x\rangle$ ба $|v\rangle = A_i(1)|\psi\rangle = \sum_{x=0}^{2^3-1} v_x|x\rangle$, $(i=\overline{1,4})$ векторуудын хувьд (5) тэгшитгэлээс дараах хүснэгт зохиож болно.

$\|x\rangle$	$\|000\rangle$	$\|001\rangle$	$\|010\rangle$	$\|011\rangle$	$\|100\rangle$	$\|101\rangle$	$\|110\rangle$	$\|110\rangle$
$\|x\rangle$	$\|0\rangle$	$\|1\rangle$	$\|2\rangle$	$\|3\rangle$	$\|4\rangle$	$\|5\rangle$	$\|6\rangle$	$\|7\rangle$
v_x	0	a	a	0	a	0	0	0
u_x	0	0	0	a	0	a	a	0

Үүнийг тооцвол (6), (7) тэгшитгэлээс $D_i = 9|a^2|^2 = \frac{9}{36}$, $Q = \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{4}\frac{9}{36} = 1$ гэж олдоно.

Лемма. Сэлгэмэлийн симметри төлөвийн глобал сүлэгдэлт ба даяарын конкуренцийн хувьд

$$Q(\psi) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} C^{i^2}_{\text{whole}} \qquad (8)$$

гэсэн хялбар холбоо оршин байна.

Баталгаа. Дурын $|\psi\rangle \in (C^2)^{\otimes n}$ төлөвийн глобал сүлэгдэлтийг олохын тулд түүнийг

$$|\psi\rangle = |0_i\rangle \otimes |\psi_0^i\rangle + |1_i\rangle \otimes |\psi_1^i\rangle,$$

гэж задалж бичиж болно. Үүнд $|\psi_0^i\rangle = A_i(0)|\psi\rangle$, $|\psi_1^i\rangle = A_i(1)|\psi\rangle$ ба $|\psi_0^i\rangle, |\psi_1^i\rangle \in (C^2)^{\otimes(n-1)}$ нь i дүгээр бит нь орхигдсон төлөв юм.
$|\psi_0^i\rangle, |\psi_1^i\rangle$ -ийг тоон суурьт задалж бичвэл:

$$|\psi_0^i\rangle = \sum_{x=0}^{2^{n-1}-1} u_x^i|x\rangle, \qquad |\psi_1^i\rangle = \sum_{y=0}^{2^{n-1}-1} v_y^i|y\rangle, \qquad (9)$$

болох ба эндээс глобал сүлэгдэлтийг дараах байдлаар олж болно:

$$Q(\psi) = \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n} D(|\psi_0^i\rangle, |\psi_1^i\rangle) = \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{x<y}|u_x^i v_y^i - u_y^i v_x^i|^2.$$

Нөгөө талаас $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ нягтын матрицаас, i-ээс бусад кубитээр нь шпур авахад ($\rho_i = \mathrm{Tr}_{1,2,\ldots,i-1,i+1,\ldots,n}\rho$) үүсэх эмхэтгэсэн нягтын матриц нь

$$\rho_i = \begin{pmatrix} \langle\psi_0^i|\psi_0^i\rangle & \langle\psi_0^i|\psi_1^i\rangle \\ \langle\psi_1^i|\psi_0^i\rangle & \langle\psi_1^i|\psi_1^i\rangle \end{pmatrix}$$

болох ба эндээс конкуренцийг бодвол

$$C^{i^2}_{\text{whole}} = 4\det\rho_i =$$
$$4\left(\sum_x |u_x^i|^2 \sum_y |v_y^i|^2 - \sum_x u_x^{*i} v_x^i \sum_y u_y^i v_y^{*i}\right) \qquad (10)$$

гэж гарах бөгөөд энэ нь x ба y-ийн хувьд тэгш хэмтэй учир дараах байдлаар бичиж болно.

$$C^{i^2}{}_{\text{whole}} = 4\sum_{x|y}|u_x^i v_y^i - u_y^i v_x^i|^2. \qquad (11)$$

Үүнийг (8) тэгшитгэлтэй харьцуулж үзвэл (11) илэрхийлэл олдож лемма батлагдана.

Сэлгэмэлийн симметри бүхий төлөвийн хувьд

$$C^2_{\text{whole}} = Q(\psi) \qquad (12)$$

гэсэн эквивалент холбоотой байх нь илэрхий.

Тэгшитгэл (8) ба (12) нь энэ ажлын гол үр дүн болно.

[1] D. A. Meyer and N. R. Wallach, "Global Entanglement in Multiparticle Systems," , quant-ph/0108104.

[2] D. Ulam-Orgikh, Ph.D. thesis, Osaka University, Osaka, Japan, 2002.

[3] W. K. Wootters, "Entanglement of Formation and Concurrence," Quant. Inf. Comp. **1**, 27–44 (2001).

[4] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, "Quantum Computation and Quantum Information," Phys. Rev. A. **112**, 052306 (2001).