

## Спинт Төлөвийн Квант Корреляцийг Дүрслэхүй

Н. Төвжаргал,\* Д. Галбадрах,† and П. Улам-Оргих‡

Монгол Улсын Ит Сургууль, Физик Электроникийн Сургууль, Онолын Физикийн Лаборатори

Энэ ажилд  $N$  ширхэг  $1/2$ -спинт төлөвийн квант корреляцийг спиний Вигнерийн түгэлтийн функцийг тусламжтайгаар дүрслэн үзүүлэх болно. Тухайлбал спины когерент төлөв, атомын Дике төлөв, өргөтгөсөн  $N$ -cat төлөвүүд болон Бозе-Эйнштейний Конденсацид (БЭК) үүсэх "One axis twisting" ба "Two axis twisting" гамильтонианаар үүсэх төлөвүүдийн квант корреляцийн эволюцийг үзүүлэв.

### I. УДИРТГАЛ

Квант механикт классик механикаас эрс ялгаатай байдаг нэг зүйл нь квант корреляцитай төлөв буюу орооцолдсон төлөв байдаг явдал юм. Энэ нь олон хэсгүүдээс тогтсон системийн нийт төлөвийг тодорхойлох долгион векторыг тодорхойлж болох боловч тухайн дэд системүүдийн шинж чанарыг тодорхойлох долгион векторыг ялган бичиж чадаагүйгд оршино. Нэгэнт квантаар орооцолдсон төлөвийн дэд системүүдийг ялгаж болохгүй тул түүнийг дэд системүүдийн дүрсээр илэрхийлж чадахгүйд хүрдэг. Орооцолдсон төлөвүүд нь заавал квант корреляцитай байна. Квант корреляцийг ашиглан өнөөг хүртэл онолын хувьд ч боломжгүй байсан асуудлуудыг шийдэх нэн шинэ шинжлэх ухаан сүүлийн хэдхэн жилд эрчимтэй хөгжиж байна. Иймээс өгөгдсөн төлөв квант корреляцитай эсэхийг шалгах шалгуур, квант корреляцийг хэмжих хэмжүүрийг тодорхойлох нь орчин үеийн квант механикийн нэн тулгамдсан асуудал юм. Орооцолдсон төлөвүүдийн хувьд корреляцийг дүрслэхийн тулд квази түгэлтийн функцуудийг байгуулах хэрэгтэй. Үүнд  $P$ ,  $Q$ , Вигнерийн, ... г.м түгэлтийн функцууд ордог. Эдгээр нь бозоны операторын хувьд сайн судлагдсан [5] бөгөөд спиний операторын хувьд саяхнаас судлагдаж байгаа юм [1]. Бид энэ ажлаар спинт төлөвийн Вигнерийн түгэлтийн функцийг авч үзэн түүгээр квант корреляцийг дүрслэх боломжийг судлав.

### II. ВИГНЕРИЙН ФУНКЦ

Вигнерийн функцыг,

$$\hat{T}_{kq} = \sum_{m=-J}^J (-1)^{J-m} \sqrt{2k+1} \begin{pmatrix} J & k & J \\ -m & q & m-q \end{pmatrix} \quad (1)$$

гэж тодорхойлогдсон  $\hat{T}_{kq}$  олон туйлт операторыг ашиглан байгуулдаг [2]. Энд  $\begin{pmatrix} J & k & J \\ -m & q & m-q \end{pmatrix}$  нь Вигнер-3J тэмдэгт болно. Олон туйлт оператор нь ортогональ

$$\hat{T}_{kq} \hat{T}_{k'q'} = \delta_{kk'} \delta_{qq'} \quad (2)$$

чанартай тул түүгээр системийн төлөв байдлыг илэрхийлэх нягтын матрицыг задалж болно

$$\rho = \sum_k \sum_q \rho_{kq} \hat{T}_{kq} \quad (3)$$

Уг задаргааны коэффициент  $\rho_{kq}$  нь

$$\rho_{kq} = \text{Tr}[\rho \cdot \hat{T}_{kq}^\dagger] \quad (4)$$

гэж олдох бөгөөд түүгээр Вигнерийн функцийг

$$W_\rho(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} \sum_{k=0}^{2j} \sum_{q=-k}^k Y_{kq}(\theta, \phi) \rho_{kq} \quad (5)$$

гэж байгуулж болно [3]. Үүнд  $Y_{kq}$  нь сфер гармоник функц.

Тухайлбал

$$|\psi\rangle = \sum_{m=-J}^J a_m |J, m\rangle$$

гэж өгөгдсөн долгионы векторын хувьд нягтын матриц нь

$$\rho = \sum_{m=-J}^J \sum_{m'=-J}^J a_m a_{m'}^* |J, m\rangle \langle J, m'| \quad (6)$$

гэж бичигдэх бөгөөд түүнийг (4) ба (5) тэгшитгэлд тавьж Вигнерийн функцийг байгуулна. Энд  $|J, m\rangle$  нь  $J^2$  болон  $J_z$  операторийн хувийн функц. Одоо судалгаанд ихээхэн сонирхол татдаг зарим төлөвүүдийг уг функцийг тусламжтай шинжилж үзье.

**Спиний когерент төлөв.** Бүх спин нь нэг зүгт чиглэсэн төлөвийг спин когерент төлөв гэх ба энэ төлөв нь квант корреляцигүй харин зуун хувь классик корреляцитай төлөв юм. Хэрэв

\*Electronic address: t.jargal1976@yahoo.com

†Electronic address: d.galbadrakh@yahoo.com,

‡Electronic address: numuka@yahoo.com

спинүүд 1-р зурагт үзүүлснээр  $\alpha, \beta$  өнцгөөр чиглэж байна гэвэл долгион вектор нь

$$|\alpha, \beta\rangle = \sum_{m=-J}^J \binom{2J}{J+m}^{\frac{1}{2}} \left[ \sin \frac{\alpha}{2} \right]^{J+m} \quad (7)$$

$$\cdot \left[ \cos \frac{\alpha}{2} \right]^{J-m} e^{-i(J+m)\beta} |J, m\rangle$$

гэж бичигдэнэ. Энд  $\alpha, \beta$  нь сфер координатын системийн өнцөгүүд [1].

Үүнийг (5), (6) томъёонд орлуулж тавихад

$$\begin{aligned} \rho_{kq} &= e^{-iq\beta} \left( \tan \frac{\alpha}{2} \right) \sum_{m=-J}^J \binom{2J}{J+m}^{\frac{1}{2}} \\ &\times \binom{2J}{J+m+q}^{\frac{1}{2}} \times \left( \sin \frac{\alpha}{2} \right)^{2(J+m)} \left( \cos \frac{\alpha}{2} \right)^{2(J-m)} \\ &\times (-1)^{J-m-q} \sqrt{2k+1} \cdot \begin{pmatrix} J & J & k \\ m & -m-q & q \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\rho_{kq}$ -ийг (5) тэгшитгэлд тавьж Вигнерийн түгэлтийг байгуулна (Зур.2).

**Атомын Дике төлөв.** "Сфер фазын огторгуй" дахь Дике  $|J, m\rangle$  төлөв нь гармоник осциляторийн фазын огторгуй дахь Фок  $|n\rangle$  төлөвтэй төстэй. Дикегийн үндсэн төлөв  $|J, J\rangle$  нь атомын когерент төлөв юм.

Дикегийн  $|J, 0\rangle$  төлөвт супер цацаргалт ажиглагдана [6]. Ийм төлөвийн диполийн момент тэгтэй тэнцүү учир классик цацаргалт үүсгэгч байхгүй. Иймд энэ нь цэвэр квант үзэгдэл юм. Бид уг төлөвийн хувьд Вигнерийн түгэлтийг байгуулав (Зур.3). Энд  $\theta \in [0, \pi]$ ,  $\phi \in [-\pi, \pi]$

Судлаачдын анхаарлыг нилээд татдаг төлөв нь "Предингерийн мууран" төлөв буюу  $N$ -сат төлөв болон өргөтгөсөн  $N$ -сат төлөв бөгөөд эдгээр нь дараах байдалаар тодорхойлогддог [7].

**$N$ -сат төлөв.**

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|J, J\rangle + |J, -J\rangle) \quad (8)$$

**Өргөтгөсөн  $N$ -сат төлөв**

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|J, m\rangle + |J, -m\rangle) \quad (9)$$

Эдгээр төлөвийн квант корреляцийг илэрхийлэх хэмжиглэхүүнүүдийг [7] ажил олж судалсан бөгөөд энд уг корреляцитай төлөвүүдийг спины Вигнерийн функцийг тусламжтайгаар хэрхэн дүрслэж болохыг Зур. 4 болон Зур. 5-д үзүүлэв.

"One axis twisting" гамильтониан. "One axis twisting" [4] буюу нэг тэнхлэгээрээ мушгигдах гамильтонианаар тодорхойлогдох төлөвийн хувьд Вигнерийн түгэлтийн функцийг байгууль. Уг гамильтониан нь

$$H = \frac{\hbar\chi}{2i} S_z^2 \quad (10)$$

бөгөөд энд  $S_z = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sigma_{z,i}$  байна. Энэ гамильтонианаар тодорхойлогдох төлөв нь

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left[-i\frac{H}{\hbar}t\right]|\psi(0)\rangle \quad (11)$$

байх ба уг төлөвийг  $|\psi(0)\rangle = |J, m\rangle$  анхны төлөвийн хувьд байгуулвал

$$|\psi(t)\rangle = 2^{-J} \binom{2J}{J-m}^{\frac{1}{2}} \exp[-i\alpha m^2] |J, m\rangle \quad (12)$$

болно. Энд  $\alpha$  нь хугацааны параметр. Энэ төлөвөөр байгуулах Вигнерийн түгэлтийн хугацааны эволюцийг үзүүлэв (Зур.6).

"Two axis twisting" гамильтониан. "Two axis twisting" [8] буюу хоёр тэнхлэгээрээ мушгигдах гамильтонианаар тодорхойлогдох төлөвийн хувьд Вигнерийн түгэлтийн функцийг байгууль. Уг гамильтониан нь

$$H = \frac{\hbar\chi}{2i} (S_+^2 + S_-^2) \quad (13)$$

хэлбэртэй бөгөөд энэ гамильтонианаар тодорхойлогдох төлөвийн эволюци нь

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left[-i\frac{H}{\hbar}t\right]|\psi(0)\rangle \quad (14)$$

байх ба уг төлөвийг  $|\psi(0)\rangle = |J, m\rangle$  анхны төлөвийн хувьд  $N$  тухайн утган дахь долгионы векторын аналитик шийдүүдийн [9] тусламжтайгаар "Two axis twisting" гамильтонианаар тодорхойлогдох төлөвийн квант корреляцийн хугацааны эволюцийг  $N=4$  [Зур.7] ба  $N=5$  [Зур.8] үед үзүүлэв.

Уг эволюцаас харахад хугацааны эхний эгшинд дөрвөн гэдэстэй ( $N=4$ ) дүрс (Зур.8a) байснаа аажмаар хувьсаж хоёр чих (Зур.8b) шиг юм үүсэж байна. Сонирхолтой нь уг чих маань хөдлөхгүй бөгөөд цаашид хувьссаар тэгш хэмтэй бөмбөрцөг (Зур.8d) үүснэ. Эндээс цааш анхны чихнүүдтэй нэг төвшид түүнд перпендикуляр чиглэлтэй чих (Зур.8g) үүсэж эхлэх бөгөөд цаашид хувьссаар анхны дөрвөн гэдэстэй дүрс хүртэл үргэлжлэх ба энэ процесс нь тодорхой  $T = \pi$  гэсэн үетэйгээр давтагдаж байна.

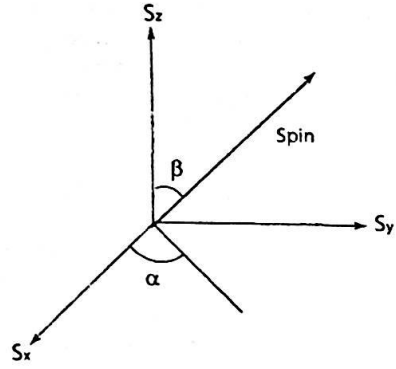
### III. ҮР ДҮН

Олон бөөмийн квант корреляцийг тодорхойлох хэмжиглэхүүнүүдийг олох нь квант физикт шийдлээ хүлээж буй асуудлуудын нэг юм. Спинт төлөвийн Вигнерын функцийг нэгж радиустай сфер дээр байгуулснаар өгөгдсөн төлөв квант корреляцитай эсэхийг шууд харж тодорхойлох боломжтой болохыг үзүүлэв. Бозе-Эйнштейний Конденсацид (БЭК) үүсэх гамильтонианаар үүсэх төлөвүүдийн квант корреляцийг

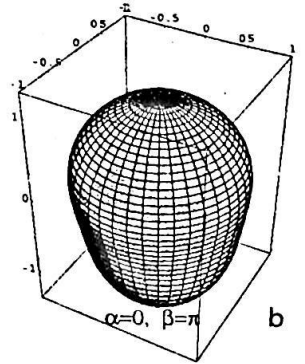
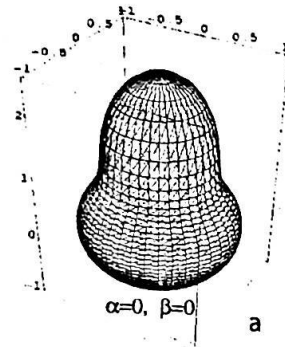
анх удаа дүрсэлж түүний эволюцийг харуулав Тухайлбал, судлаачдын анхаарлыг ихээр татлаг N-cat болон өргөтгөсөн N-cat төлөвүүд БЕК-д үүсэж байгаа нь сонирхолтой үр дүн юм. Эдгээр полжос дүрсээр дурын төлөвийн дүрсийг задлавал

задаргааны коэффициентүүд нь харгалзах коррелицид хэр ойрхон байгааг илэрхийлэх нормчилогдсон хэмжигдэхүүн буюу олон бөөмийн квант корреляцийг тодорхойлох хэмжигдэхүүнүүд байж болох тухай таамаглал дэвшүүлж байна

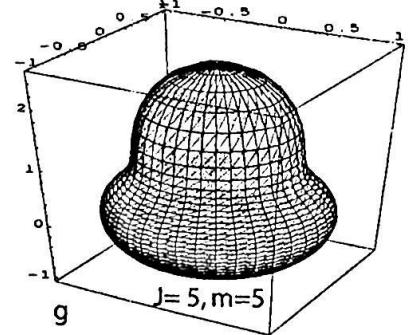
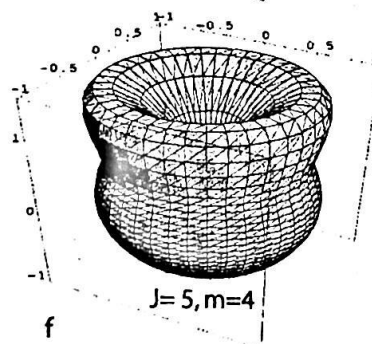
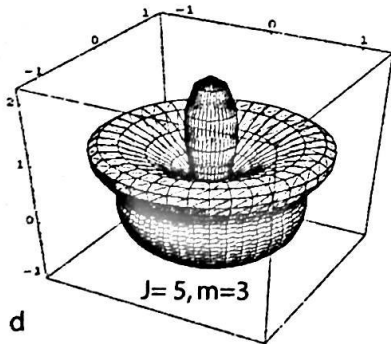
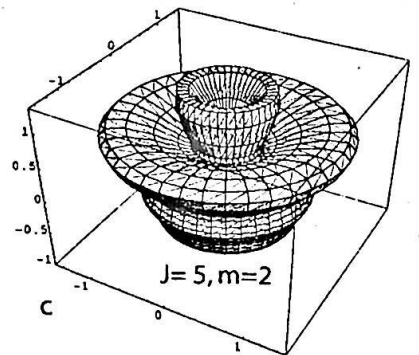
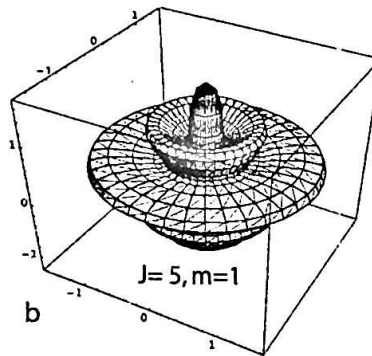
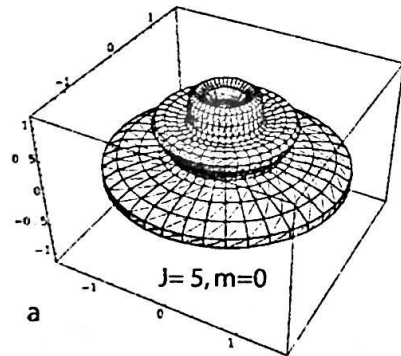
- 
- [1] G. S. Agarwal., Physical Review A., 24(6), (1981) 2889-2896
  - [2] L. C. Biedeharm and J. Louck., Angular Momentum in Quantum Physics (Addison-Wesley, Reading, MA, 1981)
  - [3] G. S. Agarwal., R. R. Puri., R. P. Singh., Phys. Rev. A 56, (1998) 2249
  - [4] Masahiro Kitagawa and Masahito Ueda Phys. Rev. A 47(6), (1993) 5138-5143
  - [5] G. S. Agarwal and E. Wolf., Physical Review D2., 2, (1970) 2206
  - [6] R. H. Dicke., Physical Review ., 93, (1954) 99
  - [7] M. G. Benedict and A. Czirjak., Physical Review A., 60(5), (1999) 4034-4044
  - [8] D. Ulam-Orgikh, M. Kitagawa, "Entanglement of Permutation Symmetric State," Энэ дугаарт pp. 3-8
  - [9] D. Ulam-Orgikh, P. Munkhbaatar, "Exact Solution of Two-Axis-Twisting Hamiltonian in Bose-Einstein Condensate," In this Issue pp. 21-31.



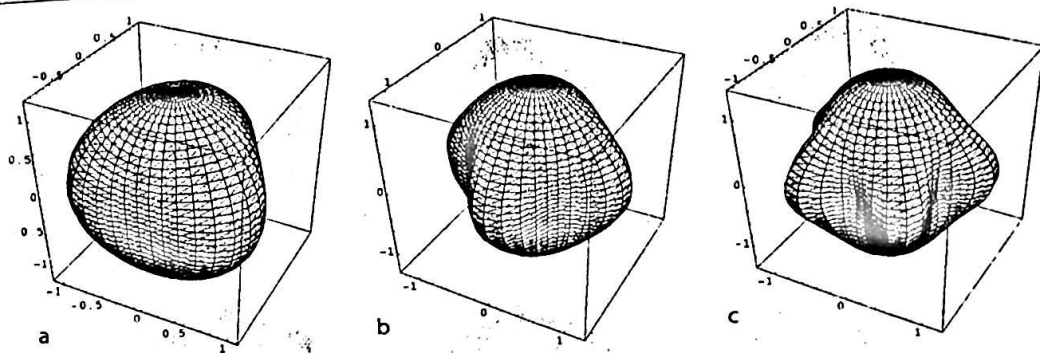
Зураг 1: Спиний координатын гэмдэглэгээ



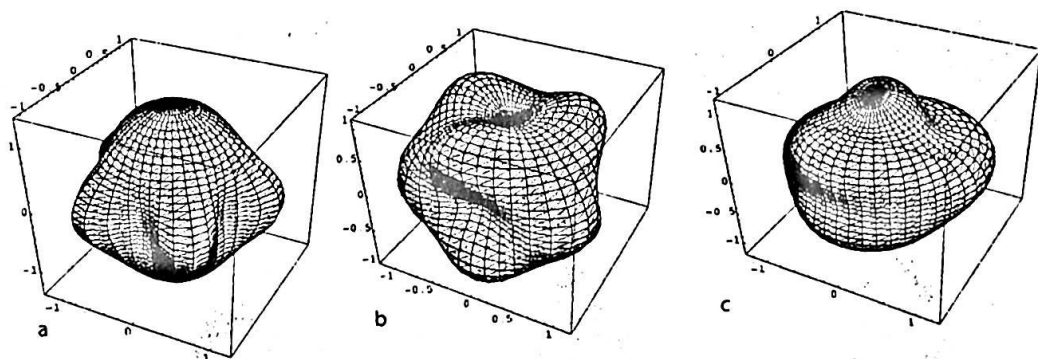
Зураг 2: Когерент төлөвийн нэгж радиустай сфер дээрхи Вигнерийн түгэлтүүд.



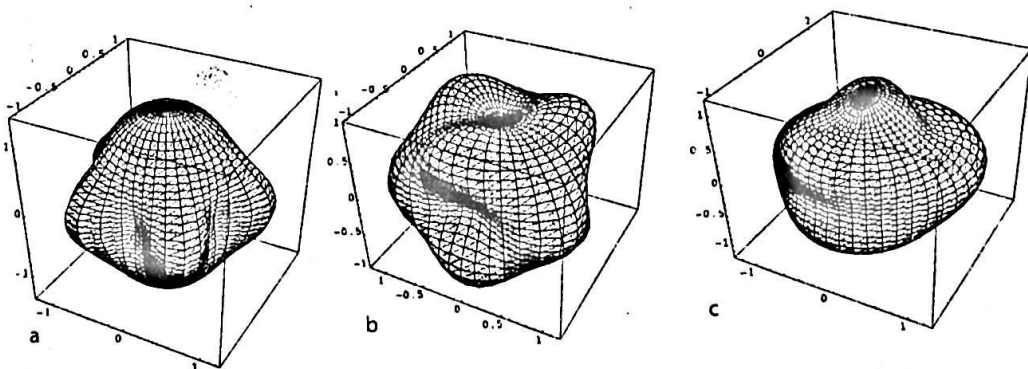
Зураг 3: Дике төлөвийн нэгж радиустай сфер дээрхи Вигнерийн түгэлтүүд а) Цэвэр квант корреляцитай төлөв буюу супер цацаргалтын төлөв, г) цэвэр классик корреляцитай төлөв буюу атомын когерент төлөв



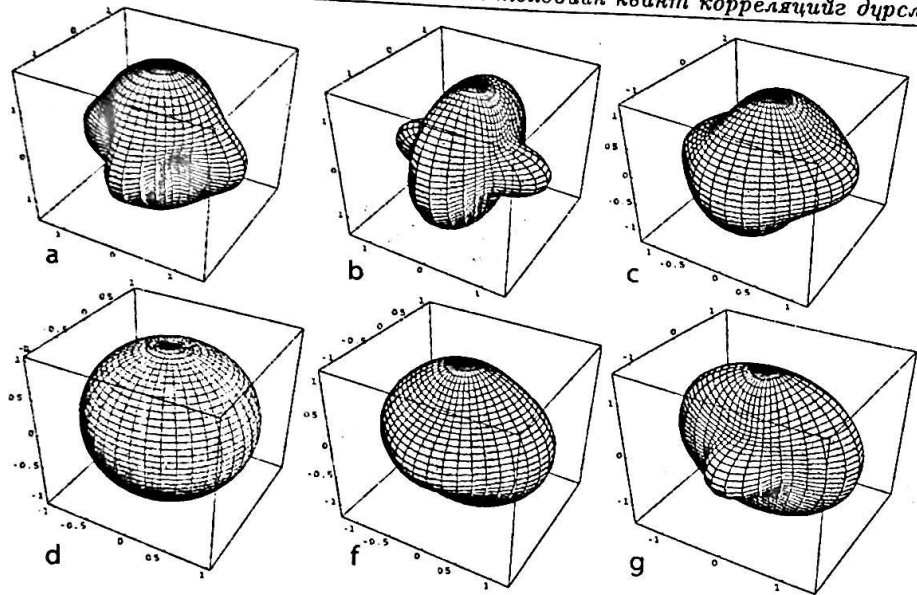
Зураг. 4: Нэгж радиустай сфер дээрх  $N$ -cat төлөвийн Вигнерийн түгэлтүүд. Энд ( $J = \frac{N}{2}$ )  $N = 3$ ,  $N = 4$ ,  $N = 5$  байх үеийн спиний түгэлтүүд бөгөөд харгалзан а, b, c зургууд болно.  $N$ -cat төлөв нь  $N$  гэдэстэй байна.



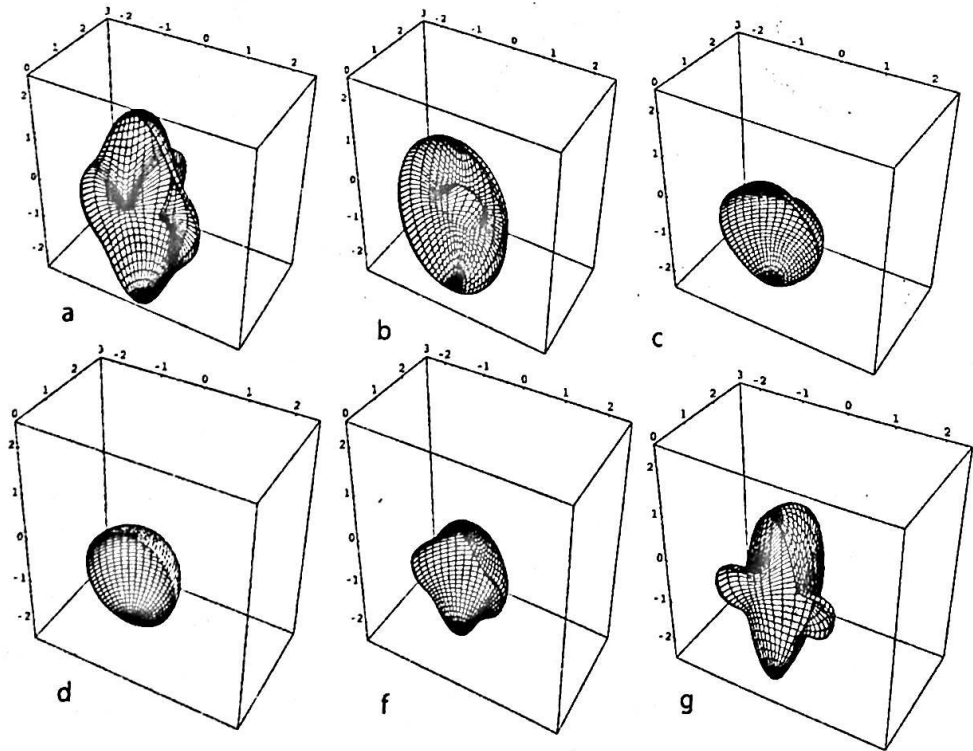
Зураг. 5: Нэгж радиустай сфер дээрх өргөтгөсөн  $N$ -cat төлөвийн Вигнерийн түгэлтүүд ( $N = 5$ ). а)  $J = 5/2$ ,  $m = 5/2$  б)  $J = 5$ ,  $m = 3/2$  в)  $J = 5$ ,  $m = 1/2$



Зураг. 6: "One axis twisting" гамильтонианнаар тодорхойлогдох төлөвийн нэгж радиустай сфер дээрхи хугацааны янз бүрийн эгшин дэх Вигнерийн түгэлтүүд ( $N = 5$ ). Эволюцийн явцад өргөтгөсөн  $N$ -cat төлөвүүд үүсч байна (5-р зурагтай харьцуулж үзнэ үү).



Зураг. 7: "Two axis twisting" гамильтонианаар тодорхойлогдох төлөвийн нэгж радиустай сфер дээрхи хугацааны янз бүрийн эгшин дэх Вигнерийн түгэлтүүд ( $N = 4$ ). а)  $\alpha = 0T$ , б)  $\alpha = \frac{1}{6}T$ , в)  $\alpha = \frac{1}{3}T$ , д)  $\alpha = \frac{1}{2}T$ , ф)  $\alpha = \frac{2}{3}T$ , г)  $\alpha = \frac{5}{6}T$  бөгөөд  $T = 0.9$



Зураг. 8: "Two axis twisting" гамильтонианаар тодорхойлогдох төлөвийн нэгж радиустай сфер дээрхи хугацааны янз бүрийн эгшин дэх тэгш хэмтэй огтолсон Вигнерийн түгэлтүүд ( $N = 5$ ). а)  $\alpha = 0T$ , б)  $\alpha = \frac{1}{6}T$ , в)  $\alpha = \frac{1}{3}T$ , д)  $\alpha = \frac{1}{2}T$ , ф)  $\alpha = \frac{2}{3}T$ , г)  $\alpha = \frac{5}{6}T$  бөгөөд энд  $T = \pi$