МУИС-ийн Эрдэм Шинжилгээний Бичиг 224 ФИЗИК (11):9- 11, 2004

Спинт Төлөвийн Тэнцэтгэл Бишүүд

П.Мөнхбаатар, Д.Улам-Оргих
*Онолын Физикийн Лаборатори, Физик Электроникийн Сургууль, Монгол Улсын Их Сургууль**

Энд [1] ажилд ашигласан, спиний коллектив операторын дундаж хэмжигдэхүүний хувьд бичигдсэн зарим сонирхолтой тэнцэтгэл бишийг батлаж үзүүлэв. Ийм тэнцэтгэл бишүүдийн хязгаарын нөхцлөөр дээд эрэмбийн квант корреляцуудыг илэрхийлэх хэмжигдэхүүнийг олж илэрхийлэх боломжтой гэдэг санааг бид дэвшүүлж байна.

N тооны $\frac{1}{2}$-спинээс тогтсон сэлгэмэл симметри бүхий дараах төлөвийг авч үзье:

$$|\Psi\rangle = \sum_{n=0}^{N} c_n |\Phi(N,n)\rangle. \tag{1}$$

Үүний

$$\begin{aligned} |\Phi(N,n)\rangle &= \sum_{\text{сэл}} \underbrace{|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes .. \otimes |0\rangle}_{n} \\ &\quad \otimes \underbrace{|1\rangle \otimes |1\rangle \otimes .. \otimes |1\rangle}_{N-n} \\ &= \sum_{\text{сэл}} |\underbrace{000...0}_{n}\underbrace{111...1}_{N-n}\rangle. \end{aligned}$$

ба $\sum_{\text{сэл}}$ гэсэн тэмдэглэгээ нь n ширхэг тэг, $N-n$ ширхэг нэг байх бүх сэлгэмэлийн нийлбэрийг илэрхийлнэ; мөн $\frac{1}{2}$-спиний дээш болон доош харсан төлөвийг харгалзан $|0\rangle = |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ буюу $|1\rangle = |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ гэж тэмдэглэсэн бөгөөд харин $\otimes$ нь тензор үржвэр болно.

Өгөгдсөн (1) долгионы вектороор илэрхийлэгдэх системийн хувьд дурын хоёр спиний байрлалыг солиход системийн долгион вектор буюу физик шинж чанар нь өөрчлөгдөхгүй. Тухайлбал:

$$\langle \hat{F}^{(q)} \rangle = \langle \hat{F}^{(p)} \rangle \quad (q \neq p), \tag{2}$$

$$\langle \hat{F}^{(q)} \hat{B}^{(p)} \rangle = \langle \hat{F}^{(i)} \hat{B}^{(l)} \rangle \quad (q \neq p, i \neq l). \tag{3}$$

Энд $\hat{F}^{(i)}$ нь i дугаар спинд үйлчлэх оператор. Эдгээр шинж чанарыг ашиглаж спиний коллектив операторын дундаж хэмжигдэхүүнийг олж болно. Спиний коллектив оператор S_k нь дараах байдлаар тодорхойлогддог [2]:

$$S_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sigma_k^{(i)} \qquad (k = x, y, z).$$

Энд $\sigma_k^{(i)}$ нь i-р спиний Паулийн оператор болно

$$\sigma_k^{(i)} = \underbrace{I \otimes ... \otimes I}_{i-1} \otimes \sigma_k \otimes \underbrace{I \otimes ... \otimes I}_{N-i} \quad (k = x, y, z).$$

Эдгээр операторууд дараах коммутацийн харьцаатай:

$$[\sigma_x^{(p)}, \sigma_y^{(q)}] = 2i\,\sigma_z^{(p)}\,\delta_{pq}\,\varepsilon_{xyz}.$$

Энд δ_{pq} нь Кронекерын тэмдэгт, ε_{xyz} нь Леви-Сивитагийн тэмдэгт болно. Спиний коллектив операторын нэгдүгээр эрэмбийн дундаж хэмжигдэхүүн нь (2) тэгшитгэл ёсоор

$$\langle S_k \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \langle \sigma_k^{(i)} \rangle = \frac{1}{2} N \langle \sigma_k^{(i)} \rangle, \tag{4}$$

хоёрдугаар эрэмбийн дундаж хэмжигдэхүүн нь (3) тэгшитгэл ёсоор

$$\begin{aligned} \langle S_k^2 \rangle &= \tfrac{1}{4} \textstyle\sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} \langle \sigma_k^{(i)} \sigma_k^{(j)} \rangle \\ &= \tfrac{1}{4} (N \langle \sigma_k^{(i)2} \rangle + N(N-1) \langle \sigma_k^{(i)} \sigma_k^{(j)} \rangle) \\ &= \tfrac{1}{4} N (1 + (N-1) \langle \sigma_k^{(i)} \sigma_k^{(j)} \rangle) \end{aligned} \tag{5}$$

болно. Эдгээрээс харвал нэг ба хоёрдугаар эрэмбийн дундаж хэмжигдэхүүнүүд нь дурын хоёр спиний төлвөөр(дунджаар) тодорхойлогдож байна. Энэ хоёр спинийг 1-р ба 2-р спин гээд системийн төлөвийг дараах байдлаар бичиж болно

$$|\Psi\rangle = |00\rangle \otimes |\varphi_o\rangle + (|01\rangle + |10\rangle) \otimes |\varphi_1\rangle + |11\rangle \otimes |\varphi_2\rangle.$$

Үүнд

$$|\varphi_i\rangle = \sum_{k=i}^{N-2+i} c_{k+i} \begin{pmatrix} N-2 \\ k-i \end{pmatrix}^{1/2} |\Phi(N-2, k-i)\rangle.$$

Иймд спиний дунджийн хэмжигдэхүүнүүд

$$\langle \sigma_z^{(1)} \rangle = (\langle \varphi_0 | \varphi_0 \rangle - \langle \varphi_2 | \varphi_2 \rangle), \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \langle \sigma_x^{(1)} \sigma_x^{(2)} \rangle &= \langle \varphi_0 | \varphi_2 \rangle + 2 \langle \varphi_1 | \varphi_1 \rangle + \langle \varphi_2 | \varphi_0 \rangle, \\ \langle \sigma_y^{(1)} \sigma_y^{(2)} \rangle &= 2 \langle \varphi_1 | \varphi_1 \rangle - \langle \varphi_0 | \varphi_2 \rangle - \langle \varphi_2 | \varphi_0 \rangle, \\ \langle \sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} \rangle &= \langle \varphi_0 | \varphi_0 \rangle - 2 \langle \varphi_1 | \varphi_1 \rangle + \langle \varphi_2 | \varphi_2 \rangle \end{aligned} \tag{7}$$

*Electronic address: p_munkhbaatar@yahoo.com, ulamorgikh@num.edu.mn

болох ба (6)-ийг (4)-д, (7)-ийг (5)-д орлуулбал:

$$\langle S_z\rangle = \frac{1}{2}N(\langle\varphi_0|\varphi_0\rangle - \langle\varphi_2|\varphi_2\rangle), \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \langle S_z^2\rangle &= \tfrac{N}{4}(1+(N-1) \\ &\quad (\langle\varphi_0|\varphi_0\rangle - 2\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle + \langle\varphi_2|\varphi_2\rangle)), \\ \langle S_y^2\rangle &= \tfrac{N}{4}(1+(N-1) \\ &\quad (2\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle - \langle\varphi_0|\varphi_2\rangle - \langle\varphi_2|\varphi_0\rangle)), \\ \langle S_x^2\rangle &= \tfrac{N}{4}(1+(N-1) \\ &\quad (2\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle + \langle\varphi_0|\varphi_2\rangle + \langle\varphi_2|\varphi_0\rangle)). \end{aligned} \quad (9)$$

Эдгээр дунджийг ашиглаж зарим чухал тэнцэтгэл бишүүдийг баталж үзүүлье.

Тэнцэтгэл биш 1

$$(J^2 - \langle S_x^2\rangle)(J^2 - \langle S_y^2\rangle) \geq \frac{1}{4}(N-1)^2\langle S_z\rangle^2 \quad (10)$$

Баталгаа: (10) тэнцэтгэл бишт (9) ба (8)-дундаж хэмжигдхүүнийг орлуулбал

$$\begin{aligned} &(1 - (2\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle + \langle\varphi_2|\varphi_0\rangle + \langle\varphi_0|\varphi_2\rangle)) \times \\ &(1 - (2\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle - \langle\varphi_2|\varphi_0\rangle - \langle\varphi_0|\varphi_2\rangle)) \geq \\ &\qquad (\langle\varphi_0|\varphi_0\rangle - \langle\varphi_2|\varphi_2\rangle)^2. \end{aligned}$$

Энд $\langle\Psi|\Psi\rangle = \langle\varphi_0|\varphi_0\rangle + \langle\varphi_2|\varphi_2\rangle + 2\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle = 1$ болохыг тооцвол:

$$\begin{aligned} &(\langle\varphi_0|\varphi_0\rangle + \langle\varphi_2|\varphi_2\rangle)^2 - (\langle\varphi_2|\varphi_0\rangle + \langle\varphi_0|\varphi_2\rangle)^2 \geq \\ &\qquad (\langle\varphi_0|\varphi_0\rangle - \langle\varphi_2|\varphi_2\rangle)^2 \end{aligned}$$

буюу

$$2\sqrt{\langle\varphi_0|\varphi_0\rangle\langle\varphi_2|\varphi_2\rangle} \geq \langle\varphi_2|\varphi_0\rangle + \langle\varphi_0|\varphi_2\rangle.$$

Харин энэ тэнцэтгэл биш нь

$$|\Phi\rangle = \sqrt{\langle\varphi_2|\varphi_2\rangle}|\varphi_0\rangle - \sqrt{\langle\varphi_0|\varphi_0\rangle}|\varphi_2\rangle$$

векторын дотоод үржвэр тэгээс их байна гэдгээс батлагдана.

Тэнцэтгэл биш 2

$$\langle S_y^2\rangle + \frac{\langle S_z^2\rangle - \langle S_z\rangle^2}{1 - (\langle S_z\rangle/J)^2} \geq J \quad (11)$$

Баталгаа: (11) тэнцэтгэл бишт (8), (9) илэрхийллийг орлуулвал:

$$\begin{aligned} &\frac{N}{4}(1+(N-1)[2\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle - \langle\varphi_0|\varphi_2\rangle - \langle\varphi_2|\varphi_0\rangle]) + \\ &\frac{N}{4}(1+(N-1)[\langle\varphi_0|\varphi_0\rangle + \langle\varphi_2|\varphi_2\rangle - 2\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle] - \\ &\qquad N(\langle\varphi_0|\varphi_0\rangle - \langle\varphi_2\varphi_2\rangle)^2) \times \\ &\qquad (1 - (\langle\varphi_0|\varphi_0\rangle - \langle\varphi_2|\varphi_2\rangle)^2)^{-1} \geq \frac{N}{2}. \end{aligned}$$

Тэнцэнгэл бишийн зүүн гар талыг

$$\langle\varphi_0|\varphi_2\rangle + \langle\varphi_2|\varphi_0\rangle \leq 2\sqrt{\langle\varphi_0|\varphi_0\rangle\langle\varphi_2|\varphi_2\rangle}$$

гэдгийг тооцож багасгавал дараах тэнцэтгэл бишийг батлах бодлого болно.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(1+(N-1)[2\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle - 2\sqrt{\langle\varphi_0|\varphi_0\rangle\langle\varphi_2|\varphi_2\rangle}]) + \\ &\frac{1}{2}(1+(N-1)[\langle\varphi_0|\varphi_0\rangle + \langle\varphi_2|\varphi_2\rangle - 2\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle] - \\ &\qquad N(\langle\varphi_0|\varphi_0\rangle - \langle\varphi_2\varphi_2\rangle)^2) \times \\ &\qquad (1 - (\langle\varphi_0|\varphi_0\rangle - \langle\varphi_2|\varphi_2\rangle)^2)^{-1} \geq 1. \end{aligned}$$

Дараах орлуулага хийе:

$$\begin{aligned} b^2 &= \langle\varphi_1|\varphi_1\rangle, \\ x^2 &= \langle\varphi_1|\varphi_1\rangle + \langle\varphi_0|\varphi_0\rangle \quad (x^2 \geq b^2 \geq 0), \\ y^2 &= \langle\varphi_1|\varphi_1\rangle + \langle\varphi_2|\varphi_2\rangle \quad (y^2 \geq b^2 \geq 0). \end{aligned}$$

Энд $\langle\Psi|\Psi\rangle = \langle\varphi_0|\varphi_0\rangle + \langle\varphi_2|\varphi_2\rangle + 2\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle = 1$ гэсэн нөхцөлөөс $x^2 + y^2 = 1$ байна.

$$\begin{aligned} &\frac{N-1}{2}\Big\{2b^2 - 2\sqrt{(x^2-b^2)(y^2-b^2)} + \\ &\qquad \frac{1 - 4b^2 - (x^2-y^2)^2}{1-(x^2-y^2)^2}\Big\} \geq 0. \end{aligned}$$

Одоо энэ $\{\ldots\}$ хаалтан дотор байгаа илэрхийллийг тэгээс их болохыг үзүүлэхэд хангалттай.

$$\begin{aligned} &4x^2y^2[2b^2 - 2\sqrt{(x^2-b^2)(y^2-b^2)}] + \\ &(x^2+y^2)^2 - 4b^2x^2 - 4b^2y^2 - (x^2-y^2)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

ба хялбар хувиргалт хийвэл

$$\begin{aligned} &x^2y^2[2b^2 - 2\sqrt{(x^2-b^2)(y^2-b^2)}] + \\ &(x^2y^2 - b^2x^2 - b^2y^2)(x^2+y^2) \geq 0 \end{aligned}$$

буюу

$$\begin{aligned} &2x^2y^2b^2 + x^4y^2 + y^4x^2 - b^2(x^2+y^2)^2 \geq \\ &\qquad 2x^2y^2\sqrt{(x^2-b^2)(y^2-b^2)} \end{aligned}$$

болно. Тэнцэтгэл бишийн зүүн гар талын нийлбэрийн квадратыг задлаад x^4, y^4 ялгавал

$$x^4(y^2-b^2) + y^4(x^2-b^2) \geq 2x^2y^2\sqrt{(x^2-b^2)(y^2-b^2)}$$

буюу Кошийн тэнцэтгэл биш болж батлагдана $\langle\varphi_0|\varphi_0\rangle = \langle\varphi_2|\varphi_2\rangle$ үед тэнцэтгэл болно.

Тэнцэтгэл биш 3 *Робертсоны тэнцэтгэл бишийг [3] баталж үзүүлье:*

$$\langle S_x{}^2\rangle\langle S_y{}^2\rangle \geq \frac{1}{4}(\langle S_z\rangle^2 + \langle S_xS_y + S_yS_x\rangle^2) \quad (12)$$

Баталгаа: S_z-ийг $[S_x, S_y] = i S_z$ коммутацийн харьцаанаас олж тэнцэтгэл бишийн зүүн гар талд орлуулвал:

$$\langle S_x{}^2\rangle\langle S_y{}^2\rangle \geq \frac{1}{4}(\langle S_xS_y + S_yS_x\rangle^2 - \langle S_xS_y - S_yS_x\rangle^2)$$

буюу

$$\langle S_x{}^2\rangle\langle S_y{}^2\rangle \geq \langle S_xS_y\rangle\langle S_yS_x\rangle \tag{13}$$

болно. Одоо

$$S_x|\psi\rangle = |\psi_1\rangle, \quad S_y|\psi\rangle = |\psi_2\rangle$$

гэсэн тэмдэглэгээг оруулж дунджуудыг бичвэл

$$\begin{aligned}
\langle S_x{}^2\rangle &= \langle\psi|S_x{}^2|\psi\rangle = \langle\psi_1|\psi_1\rangle, \\
\langle S_y{}^2\rangle &= \langle\psi|S_y{}^2|\psi\rangle = \langle\psi_2|\psi_2\rangle, \\
\langle S_xS_y\rangle &= \langle\psi|S_xS_y|\psi\rangle = \langle\psi_1|\psi_2\rangle, \\
\langle S_yS_x\rangle &= \langle\psi|S_yS_x|\psi\rangle = \langle\psi_2|\psi_1\rangle,
\end{aligned}$$

(13) тэнцэтгэл бишийг бичвэл:

$$\langle\psi_1|\psi_1\rangle\langle\psi_2|\psi_2\rangle \geq \langle\psi_1|\psi_2\rangle\langle\psi_2|\psi_1\rangle$$

болно. Сүүлийн тэнцэтгэл бишийг

$$|\Psi\rangle = \frac{\langle\psi_1|\psi_2\rangle}{|\langle\psi_1|\psi_2\rangle|\sqrt{\langle\psi_1|\psi_1\rangle}}|\psi_1\rangle - \frac{1}{\sqrt{\langle\psi_2|\psi_2\rangle}}|\psi_2\rangle$$

вектор $\langle\Psi|\Psi\rangle \geq 0$ гэдгээс баталж болно.

N тооны $\frac{1}{2}$ спинээс тогтсон сэлгэмэл симметри төлөвийн хувьд координатын системийг эргүүлэх замаар $\langle S_x\rangle = \langle S_y\rangle = 0$ ба $\langle S_x^2\rangle_{min}$, $\langle S_y^2\rangle_{max}$ ($\langle S_xS_y + S_yS_x\rangle = 0$) байх координатын систем сонгож авч болдог [4]. Энэ координатын системд спиний коллектив операторуудыг $S_x \to S_\perp$, $S_y \to S_\top$, $S_z \to S_\eta$ гэж тэмдэглэдэг. Дээр батлсан тэнцэтгэл бишүүд энэ координатын системд хамгийн оптималь утгуудаа авдаг. Өөрөөр хэлбэл энэ тэнцэтгэл бишүүд тэнцэтгэл рүүгээ хамгийн их ойроно. Тухайлбал, Робертсоны тэнцэтгэл биш нь энэ координатын системд Гейзенбергийн тэнцэтгэл биш болдог.

$$\langle S_\perp{}^2\rangle\langle S_\top{}^2\rangle \geq \frac{1}{4}\langle S_\eta\rangle^2, \quad (\langle S_\perp S_\top + S_\top S_\perp\rangle = 0). \tag{14}$$

Чухам ийм тооллын системд бичигдсэн Гейзенбергийн тэнцэтгэл бишийг үндэслэн спины шахагдсан төлөвийг дараах байдлаар тодорхойлдог:

$$\xi = \frac{2\langle S_\perp{}^2\rangle}{J} < 1. \tag{15}$$

Ингэж тодорхойлогдсон спины шахагдсан төлөв нь үргэлж квант корреляци агуулж байдгийг [1] ажилд баталж үзүүлсэн ба үүний адилаар бидний баталсан тэнцэтгэл бишүүдийг ажиглан дээд эрэмбийн квант корреляцуудыг илэрхийлэх хэмжигдэхүүнүүдийг олох боломжтой гэдэг санааг бид дэвшүүлж байгаа бөгөөд дэлгэрэнгүй судалгааг өөр ажилд хэвлэх болно.

[1] D. Ulam-Orgikh and M. Kitagawa, "Entanglement of Permutation Symmetric State," In this Issue pp. 3–8

[2] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum mechanics* (Nauka, Moskva, 1973).

[3] H. P. Robertson, "An indeterminacy relation for several observables and its classical interpretation," Phys.Rev. **46**, 794–801 (1934).

[4] D. Ulam-Orgikh., "Spin Squeezing and Quantum Entanglement," PhD thesis, Osaka University, Toyonaka-shi, Osaka, Japan, June (2002).