

Хүн амын өсөлтийн математик загвар

Ц. Болорчимэг

**Сангийн яамны судалгааны
төвийн мэргэжилтэн**

Монгол улс өргөн уудам нутагтай, хүн ам цөөн, хүн амын нягтрал 1 кв.км-д 1,4 хүн ноогдож байгаа, хүн амын өсөлт нэлээд хурдацтай буурч байгаа зэрэг нь уг асуудалд буурь сууртай, үндэслэлтэй хандахыг зүй ёсоор шаардаж байгаа юм.

"Хүн ам зүй нь явцуу утгаараа хүн амын нөхөн үржихүй, хөдлөл зүйг хэмжих, тооцох, аргачлалын шинжтэй математик томъёоллын чанартай мэдлэгийн салбар, өргөн утгаараа хүн амын амьдрал, нөхөн үржихүйн орчин, нөхцөл байдлыг судалдаг олон шинжлэх ухааны цогц нийлбэр мөн" гэж тодорхойлсон байдаг. Иймээс хүн амын бодлогын зөв шийдэл нь хүн амын нөхөн үржихүйн 3 үндсэн бүрэлдэхүүн хэсэг болох төрөлт, нас баралт, шилжих хөдөлгөөний хөдлөл зүйг авч үзсэнээр тэр бүр гарч ирэхгүй, харин хүн амын үзэгдлүүдийн талаар нарийвчилсан судалгаа, шинжилгээ хийж, түүнийгээ бусад шинжлэх ухаанууд тухайлбал, эдийн засаг, математик, статистик, газарзүй цаашилбал, хүн судлал, генетик, биологийн ухаануудтай нягт холбож авч үзэх нь маш чухал асуудал болж байна. Энэ үндсэн дээр хүн ам зүйн шинжлэх ухаан зөвхөн математикийн шинжлэх ухаантай хэрхэн уялдаж байдгийг судлахыг зорьсон юм.

Энд Монгол улсын хүн амын өсөлтийн өнгөрсөн, өнөөгийн болон ирээдүйн чиг хандлагыг судалж түүнд үнэлэлт дүгнэлт өгсний үндсэн дээр хүн ам зүйд математикийг хэрхэн ашиглаж болохыг тодорхойлж, Монголын хүн амын өсөлтийг математик загваруудаар гаргаж, тэдгээрийн хуулийг зохиож, эдгээр хуулиудаар хүн амын өсөлтийн хэтийн тооцоог хийсэн юм.

Хүн ам зүйд математик аргуудыг ашиглах нь.

Аливаа улс орны нийгмийн нэг гол үзүүлэлт бол хүн амын тоо, түүний өсөлт өөрчлөлт байдаг бөгөөд энэ үзүүлэлтийг байнга тооцож, шинжилгээ судалгаа хийж байдаг. Өнөөгийн нөхцөлд олонх оронд хүн амын тоо, газар нутгийн байршлын тухай хамгийн бүрэн цэгцтэй мэдээллийн эх үүсвэр нь хүн амын тооллого юм. Гэхдээ хүн амын тооллогыг 5-10 жилд нэг удаа явуулдаг. Иймд хүн амын тоог тодорхойлох тооцоог жил бүр хийж байх шаардлагтай байдаг юм.

Хүн амын тооны тооцоог цаг хугацааг хамрах байдлаар нь

- хүн амын тооллогуудын хоорондох тооцоо
- сүүлчийн тооллогоорх тооцоо
- ирээдүйн тооцоо гэж ангилна.

1. Тооллогуудын хоорондох тооцоо гэдэг нь хоёр тооллогын хоорондох онуудаар хийсэн тооцоо юм. Жишээлбэл, 1979, 1989 оны тооллогуудын хоорондох хугацааг хамарсан хүн амын тооцоо байж болно.

2. Сүүлчийн тооллогоорх тооцоо гэдэг нь хамгийн сүүлчийн тооллогоос эхлэн тухайн жил хүртэлх хугацааг хамарсан тооцоо юм. Жишээ нь, Сүүлчийн тооллого болох 1989 оноос эхлэн 1995 он хүртэлх хугацааг хамарсан байх.

3. Ирээдүйн (хэтийн) тооцоо гэдэг нь тухайн үеэс эхлэн тодорхой хугацааны дараах хэтийн тооцоо юм. Жишээлбэл, 1995 оноос эхлэн 2010 он хүртэлх 15 жилийг хамарсан байх гэх мэт.

Хүн амын хэтийн тооцоо нь – тодорхой хугацаан дахь улс орны эсвэл бүс нутгийн хүн амын өсөлтийг илтгэх үзүүлэлт юм.

Тодорхой хугацаан дахь хүн амын тооны өөрчлөлт нь тухайн улсын хүн амын төрөлт, нас баралт, шилжих хөдөлгөөн гэсэн хүн ам зүйн гурван

бүрэлдэхүүн хэсгээр тодорхойлогдоно. Нэгэнт хүн төрж, өсөж, хөдөлж байдаг болохоор тэдгээрийн тоо ч тухайн газар нутгийн хэмжээнд өөрчлөгдөж байдаг. Тухайн хугацааны хүн амын тооны өөрчлөлтийг тооцдог үндсэн арга бол " тэнцлийн томьёо " юм. Үүнийг харуулбал :

$$P_t = P_0 + (B - D) + (I - E)$$

P_t, P_0 -- тайлант хугацааны эцэс (эхэн) —д байсан хүн амын тоо

B -- тайлант хугацааны нийт төрөлтийн тоо

D -- тайлант хугацааны нийт нас баралтын тоо

I -- тайлант хугацаанд шилжин ирсэн хүн амын тоо

E -- тайлант хугацаанд шилжин явсан хүн амын тоо

$B-D$ - ердийн цэвэр өсөлт

$I-E$ - цэвэр шилжих хөдөлгөөн (ЦШХ)

Хүн амын тооны өсөлт өөрчлөлтөд зарим оронд ердийн цэвэр өсөлт голлон нөлөөлж байхад нөгөө хэсэгт нь цэвэр шилжих хөдөлгөөний нөлөөлөл зонхилж байдаг. Өөрөөр хэлбэл төрөлтийн түвшин өндөр байгаа хөгжиж байгаа орнуудын хүн амын өөрчлөлтөд ердийн цэвэр өсөлт нөлөөлж байхад хөгжингүй оронд ЦШХ нөлөөлдөг нь харилцан адилгүй үзэгдэл юм.

Хүн амын өсөлтийн хурдны тусламжтайгаар хүн амын загвар гаргана гэдэг нь үндсэндээ хүн амын тооцоог хийнэ гэсэнтэй утга дүйх бөгөөд гол төлөв хүн амын хэтийн тооцоонд өргөн ашиглаж, ирээдүйд байж болох хүн амынхаа тоог тодорхойлсноор тодорхой цаг үе дэх цаашилбал, ирээдүй дэхь хүний нөөц, ажил эрхлэлт, эрүүл мэнд, боловсрол болон бусад үйлдвэр үйлчилгээнд шаардагдах хүн амын тоог гаргах бололцоо олгогдоороо нийгэм эдийн засгийн төлөвлөлтийн чухал үндэс суурь болохоос гадна судалгаа шинжилгээнд, мөн бодлого боловсруулахад өргөн ашигладаг юм.

Хүн амын хэтийн тооцоонд ашиглагддаг янз бүрийн аргууд байдаг бөгөөд эдгээрээс нэлээд өргөн хэрэглэгддэг нь

— математик арга

— бүрэлдэхүүний арга юм.

Математик аргууд

Хүн амын хэтийн тооцоонд математик загваруудыг ашиглах нь хамгийн энгийн арга нь юм. Энэ аргыг зөвхөн хүн амын тоо л шаардлагатай үед ашигладаг учраас тооллого хоорондох тооцоо болон сүүлчийн тооллогоорх тооцоонд хэрэглэх нь тохиромжтой байдаг. Энэ аргын хувьд хүн ам зүйн үзэгдлүүдийн өөрчлөлтийг тусгадаггүй зөвхөн хүн амын өсөлтийн хурданд суурилан тооцоологддог дутагдалтай талтай боловч хүн амын өсөлтийн олон жилийн динамик түүний өөрчлөлтөд тулгууралдгаараа онцлогтой юм.

Хүн амын хэтийн тооцоонд хэрэглэгддэг хэд хэдэн математик загварууд байдаг бөгөөд нилээд дэлгэрсэн математикийн функц нь шугаман, илтгэгч (экспоненциал), ложистик функцууд юм. Үүнд:

1. Геометрийн муруй

$$P(t) = P(0) \cdot (1 + r \cdot t)$$

2. Экспоненциал муруй

$$P(t) = P(0) \cdot e^{rt}$$

3. Хувиргасан экспоненциал муруй

$$P(t) = A + B \cdot C^t$$

4. Комперцын муруй

$$P(t) = a \cdot b^c$$

5. Логарифм муруй

$$P(t) = \frac{K}{1 + e^{a+b \cdot t}}$$

t -- хэтийн тооцооны он

P(t) -- тухайн жил дэхь хүн амын тоо

P(0) -- суурь хүн амын тоо

t -- хамрах хугацаа

г -- хүн амын жилийн дундаж өсөлтийн хурд

a, b, c -- параметрууд

K -- хэтийн тооцооны хүн амын асимптот

Математик аргуудыг өнгөрсөн жилүүдийн хүн амын тооны өсөлтөд тулгуурлаж хүн амын жилийн дундаж өсөлтийн хурд болон бусад параметруудийг тооцсны үндсэн дээр ямар нэг хугацааны дараах хүн амын тоог тодорхойлох боломжтой. Шугаман болон илтгэгч функцууд өөрөөр хэлбэл, 1 ба 2 муруйн хувьд тооцоог хамрах хугацааны турш өсөлтийн хурдыг өөрчлөгдөхгүй байхаар тооцдог. Хүн амын өсөлтийн хурд өөрчлөгдөхгүй байх тохиолдол бараг байдаггүй учраас урт хугацаанд эдгээр загваруудыг ашиглах боломжгүй юм.

Үлдсэн 3 муруйнуудыг хүн амын хэтийн тооцоонд ашиглахдаа ложистик функц дээр тулгууладаг. Дараах загваруудаар хүн амын хэтийн тооцоог гурван нийлбэрийн аргыг ашиглаж хийе.

3. Хүн амын өсөлтийн хувиргасан экспоненциал загвар

$$P(t) = A + B \cdot C^t \quad (5)$$

Энэ муруйн хувьд A, B, C параметруудийг өнгөрсөн үеийн хүн амын мэдээлэл дээр тулгуурлан тооцно. Хувиргасан экспоненциал тэгшитгэлийг дараах байдлаар бодож параметруудийг олно. Үүнд:

— Өнгөрсөн онуудын хүн амын тооны мэдээлэл шаардлагатай. Эдгээр онуудыг сонгохдоо 3, 6 эсвэл 9 гэх мэтчлэн 3-д хуваагдахаар, онуудын хоорондох интервалын урт нь тэнцүү байхаар сонгоно.

$$P(0) = A + B \cdot C^0$$

$$P(1) = A + B \cdot C^1$$

$$P(2) = A + B \cdot C^2$$

...

...

$$P(t+1) = A + B \cdot C^t$$

Эдгээр онуудын хүн амын тоог 3 хэсэг болгоод хэсэг тус бүрт нийлбэрийг нь олж S1, S2, S3 гэж тус тус тэмдэглэнэ.

$$S1 = m \cdot A + B \cdot [(C-1)/(C-1)]$$

$$S2 = m \cdot A + B \cdot C \cdot [(C-1)/(C-1)]$$

$$S3 = m \cdot A + B \cdot C^2 \cdot [(C-1)/(C-1)]$$

m -- нийлбэрт орсон нэгжийн тоо

— d1, d2 -ийн утгыг тооцох

$$d1 = S2 - S1$$

$$d2 = S3 - S2$$

Эндээс параметруудээ тооцвол

$$d2$$

$$C = \frac{dl}{dl}$$

$$A = \frac{1}{m} * (S1 - \frac{dl}{C-1}) ; \quad B = \frac{dl * (C-1)}{(C-1)} \quad (6)$$

Эдгээрийг тооцсоны үндсэн дээр ойрын ирээдүй дэхь хүн амын тооцоог (5) томъёог ашиглан хийж болно.

5. Хүн амын өсөлтийн логарифм муруй

$$P(t) = \frac{K}{1 + e^{a+b*t}} \quad (7)$$

Логарифм муруйгаар хүн амын өсөлтийн тооцоог хийхэд бусад загваруудаас илүү тохиромжтой байдаг. Энэ муруйн хувьд а, в, К гэсэн 3 параметруудийг тооцох шаардлагатай ба эдгээрийг тухайн хүн амын өсөлтийн өнгөрсөн үеийн динамик судалгаанд тулгуурлан тооцдог.

(7) тэгшитгэлийг дараах байдлаар хувиргаж болно.

$$\frac{1}{P(t)} = \frac{1}{K} + \frac{e^{a+b*t}}{K} = \frac{1}{K} + \left(\frac{e^a}{K}\right) (e^b)^t \quad (8)$$

(8) тэгшитгэл нь хувиргасан экспоненциал хэлбэр (5) –г орсон.

$$Y(t) = A + B * C^t$$

$$Y(t) = 1/P(t), \quad A = 1/K, \quad B = \frac{e^a}{K}, \quad C = e^b$$

А, В, С гараметруудийг (6) томёогоор олох ба тэдгээрээр дамжуулж К, а, в –г олбол $K = 1/A$, $a = \log(B * K)$, $b = \log C$ болно.

5. Хүн амын өсөлтийн Комперцийн муруй

$$P(t) = a * b^{c^t} \quad (9)$$

(9) тэгшитгэлийг хувиргах замаар хувиргасан экспоненциал муруйн хэлбэр (10)–г оруулаад дараа нь а, в, с параметруудийг олж болно.

$$\log P(t) = \log a + c * \log b$$

$$Y(t) = A + B * C \quad (10)$$

$$\text{Энд } Y(t) = \log P(t) ; \quad A = \log a ; \quad B = \log b ; \quad C = \log c$$

Энэ муруйн хувьд а, в, с гэсэн 3 параметруудийг тооцох шаардлагатай ба эдгээрийг тухайн хүн амын өсөлтийн өнгөрсөн үеийн динамик судалгаанд тулгуурлан тооцох болно.

Одоо эдгээр гурван муруйг ашиглан хүн амын хэтийн тоог хэрхэн тодорхойлохыг үзүүлье.

Жишээ. Монголын хүн амын 1970 оноос хойшхи мэдээллийг ашиглан логарифм, комперцийн болон хялбарчилсан экспоненциал муруйгаар 2019 он хүртэлх хүн амын тооцоог хийе.

1. Хувиргасан эксгоненциал муруйн хувьд

1970	1230.5	$S1 = 1230.5 + 1339.5 + 1466.5 = 4039.5$
1973	1339.5	
1976	1466.9	$S2 = 1595.0 + 1724.7 + 1854.3 = 5174.0$
1979	1595.0	
1982	1724.7	$S3 = 1997.0 + 2149.3 + 2250.0 = 6396.3$
1985	1854.3	
1988	1997.0	$d1 = S2 - S1 = 5174.0 - 4039.5 = 1137.5$
1991	2149.3	
1994	2250.0	$d2 = S3 - S2 = 6396.3 - 5174.0 = 1222.3$

$$C = \left(\frac{d2/d1}{1/m} \right)^{1/3} = \left(\frac{1222.3/1137.4}{1} \right)^{1/3} = 1.02426$$

$$A = 1/m * \left(S1 - \frac{d1}{C-1} \right) = 1/3 * \left(4039.5 - \frac{1137.4}{0.07456} \right) = -3739.4$$

$$B = \frac{d1 * (C-1)}{(C-1)} = \frac{1137.4 * 0.02426}{(1.02426-1)} = 4963.55$$

Тэгшитгэл дараах хэлбэртэй болно.

$$P(t) = -3739.4 + 4963.55 * 1.02426^t$$

он	t	Хүн ам (мянгаар)
1995	8.3333	2321.6
1999	9.6667	2518.4
2004	11.3333	2773.5
2009	13	3039.0
2014	14.6667	3315.3
2019	16.3333	3602.8

Хүн амын хэтийн тооцоог 2019 он хүртэл 5 жилийн интервалтайгаар хувиргасан экспоненциал муруйн тэгшитгэлээр хийхэд манай улс 2019 он гэхэд 3 сая 603 мянган хүнтэй болох тооцоо гарч байна.

2. Логарифм муруйн хувьд

он	хүн ам	P(t)	1/Y(t)
1970	1230.5	0.00081	$S1 = 0.00081 + 0.00075 + 0.00068 = 0.002242$
1973	1339.5	0.00075	
1976	1466.9	0.00068	$S2 = 0.00063 + 0.00058 + 0.00054 = 0.001746$
1979	1595.0	0.00063	
1982	1724.7	0.00058	$S3 = 0.0005 + 0.00047 + 0.00044 = 0.001409$
1985	1854.3	0.00054	
1988	1997.0	0.00050	$d1 = S2 - S1 = 0.001746 - 0.002242 = 0.000496$
1991	2149.3	0.00047	
1994	2250.0	0.00044	$d2 = S3 - S2 = 0.001409 - 0.001746 = 0.000337$

$$C = \left(\frac{d2/d1}{1/m} \right)^{1/3} = \left(\frac{0.000337/0.000496}{1} \right)^{1/3} = 0.8791$$

$$A = \frac{1}{m} \left(\frac{S_1 - \frac{d_1}{C-1}}{C-1} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{0.00224 - \frac{-0.0005}{-0.32062}}{-0.32062} \right) = 0.00023$$

$$B = \frac{d_1 \cdot (C-1)}{(C-1)} = \frac{-0.000496 \cdot (0.8791-1)}{(-0.32062)} = 0.00058$$

$$K = 1/A = 1/0.00023 = 4347.8$$

$$a = \log(B \cdot K) = \log(0.00058 \cdot 4347.8) = 0.9249$$

$$b = \log(C) = \log(0.8791) = -0.1289$$

Тэгшитгэл дараах хэлбэртэй болно.

$$P(t) = \frac{4347.8}{1 + e^{0.9249 - 0.1289 \cdot t}}$$

он	t	Хүн ам (мянгаар)
1995	8.3333	2335.8
1999	9.6667	2520.0
2004	11.3333	2742.9
2009	13	2953.7
2014	14.6667	3148.9
2019	16.3333	3326.2

Хүн амын хэтийн тооцоог хүртэлх логарифм муруйн тэгшитгэлээр хийхэд манай улс 2019 он гэхэд 3 сая 326 мянган хүнтэй болох тооцоо гарч байна.

3. Комперцийн муруйн хувьд

он	P(t)	logP(t)	
1970	1.2305	0.090082	$S_1 = 0.090082 + 0.126943 + 0.166282 = 0.383307$
1973	1.3395	0.126943	
1976	1.4669	0.166282	$S_2 = 0.202761 + 0.236714 + 0.26818 = 0.707655$
1979	1.5950	0.202761	
1982	1.7247	0.236714	$S_3 = 0.300378 + 0.332297 + 0.352183 = 0.277203$
1985	1.8543	0.26818	
1988	1.9970	0.300378	$d_1 = S_2 - S_1 = 0.707655 - 0.383307 = 0.984858$
1991	2.1493	0.332297	
1994	2.2500	0.352183	$d_2 = S_3 - S_2 = 0.277203 - 0.707655 = 0.277203$

$$C = \left(\frac{1}{m} \right) = \left(\frac{0.984858}{0.324349} \right) = 0.949899$$

$$A = \frac{1}{m} \left(\frac{S_1 - \frac{d_1}{C-1}}{C-1} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{0.383307 - \frac{0.3242534}{-0.050101}}{-0.050101} \right) = 0.8842603$$

$$B = \frac{d_1 \cdot (C-1)}{(C-1)} = \frac{0.383307 \cdot (-0.050101)}{0.204420} = -0.940455$$

$$a = \text{antilog}(A) = \text{antilog}(0.8842603) = 7.660556$$

$$b = \text{antilog}(B) = \text{antilog}(-0.9572846) = 0.114695$$

c = C

Тэгшитгэл дараах хэлбэртэй болно.

$$t = 0.949899$$

$$P(t) = 7.660556 * 0.1104695$$

он	t	Хүн ам (мянгаар)
1995	8.3333	2.2349
1999	9.6667	2.4973
2004	11.3333	2.7628
2009	13	3.0289
2014	14.6667	3.2931
2019	16.3333	3.4337

Хүн амын хэтийн тооцоог хүртэлх Комперцийн муруйн тэгшитгэлээр хийхэд манай улс 2019 он гэхэд 3 сая 434 мянган хүнтэй болох тооцоо гарч байна.

Хүн амын хэтийн тооцоог зөвхөн хүн амын олон жилийн динамик өсөлтөнд тулгуурлан математик загваруудыг ашиглаж тооцлоо. Хүн амын өсөлтийн чиг хандлагыг илэрхийлэхэд тохиромжтой динамик загвар болох Логарифм, Экспоненциал болон Комперцийн муруйнуудыг ашиглан 1970–1994 оны хүн амын тоон дээр тулгуурлан 1995–2019 он хүртэлх хүн амын өсөлтийг тооцоход

он	Логарифм	Экспоненциал	Комперц
1995	2335.8	2321.6	2234.9
1999	2520.0	2518.4	2497.3
2004	2742.9	2773.5	2762.8
2009	2953.7	3039.0	3028.9
2014	3148.9	3315.3	3288.6
2019	3326.2	3602.8	3433.7

Эндээс үзэхэд Логарифм загвараар хийсэн тооцоогоор 1989–2019 оны хооронд хүн амын жилийн дундаж өсөлтийн хурд 2.09 хувь, абсолют өсөлт 71 мянга байж 2019 он гэхэд манай улсын хүн ам 3 сая 326 мянгад хүрч байхад Экспоненциал загвараар хийсэн тооцоогоор, 2.5 хувь, тооны өсөлт 92 мянга, хүн ам 3,6028 сая, Комперцийн загвараар өсөлтийн хурд 2.3 хувь, тооны өсөлт 86 мянга, хүн ам 3,434 саяд хүрэх тооцоо гарч байна.

Мөн эдгээр загвараар хийсэн тооцооны алдааг үнэлэх зорилгоор бодит утга болон тооцооны утга нь бодит утгаас хэлбэлзэх дундаж хэлбэлзлийг Фишерийн шинжүүрээр тооцож үзлээ.

Ингэхэд хувиргасан экспоненциал муруйн дундаж хэлбэлзэл нь 10.3 мянган хүн, Логарифм муруйн дундаж хэлбэлзэл 15 мянга байхад Комперцийн муруйн дундаж хэлбэлзэл 12 мянган хүн байсан билээ. Үүнээс үзэхэд Хувиргасан экспоненциал муруйгаар хийсэн хүн амын тооцоо харьцангуй алдаа багатай нь батлагдлаа.

Хүн амын өсөлтийн математикийн загварууд

Энд хүн амын тасралтгүй болон зохицуулагдах өсөлтийн математик загварын талаар хөндье. Өргөн хүрээтэй хэрэглэгддэг функцийн хэлбэр нь "үлдэгдлийн модулийн нийлбэр" бөгөөд үнэлгээ нь түүнийг хамгийн бага утгатай байлгахад сонгох экстремум олох бодлого хэлбэрээр тавигддаг. Ийм учраас загваруудын параметруудийн үнэлгээг ихэвчлэн хамгийн бага квадратын аргыг (үлдэгдлийн квадратын нийлбэрийг минимумд хүргэх) ашиглан гүйцэтгэдэг юм. Уг арга нь үнэлгээний бусад аргыг бодвол энгийн хялбархан бөгөөд аналитик шийд олох боломжтой байдаг. Ийм учраас тухайн хуулийг гаргахад дээрх арга буюу хамгийн бага квадратын аргыг ашигласан болно.

Одоо хүн амын тасралтгүй болон зохицуулагдах өсөлтийн загварыг гаргахын тулд хугацааны t момент дахь хүн амын тоог $P(t)$ -ээр тэмдэглэе. Энэ нь t -ээс хамаарсан тасралтгүй дифференциалчлагддаг функц гэж үзье. Өөрөөр хэлбэл,

$$P = P(t)$$

Тооллын эхлэлийг $t = 0$ гэж авч үзвэл энэ эгшин дэхь хүн амын тоо P_0 байна.

$$P(0) = P_0.$$

Хүн амын өсөлтийн энгийн загварыг гаргахын тулд хүн амын өсөлтийн хурд нь хүн амынхаа тоотой шууд пропорциональ байна гэж үзье. Өөрөөр хэлбэл,

$$P' = \frac{dP}{dt} = K_1 P \quad (1)$$

Мөн хүн амын бууралтыг хүн амынхаа тоотойгоо шууд пропорциональ гэвэл

$$P' = \frac{dP}{dt} = -K_2 P \quad (2) \quad \text{болно.}$$

(1) тэгшитгэлийг интегралчилбал :

$$\frac{dP}{P} = k_1 dt \Rightarrow \frac{dP}{P} = \ln P = k_1 dt = k_1 t$$

$$P = e^{k_1 t} \quad t=0 \text{ үед } P(0) = P_0 \text{ тул } P(t) = P_0 e^{k_1 t} \quad \text{болно.}$$

$$\text{Мөн (2) тэгшитгэлийг бодвол, } P(t) = P_0 e^{-k_2 t} \quad \text{болно.}$$

Одоо дээрх загварын пропорционалын коэффициент нь хугацаанаас хамаарсан функц гэж үзвэл:

Өөрөөр хэлбэл, $K = K(t)$ гэж үзвэл

$$\frac{dP}{P} = K(t) dt \quad \frac{dP}{P} = K(t) dt \Rightarrow$$

$$P = P_0 e^{\int K(t) dt} \quad (3).$$

1918 - 1994 он хүртэлх монголын хүн амын өсөлтийн хурдыг ашиглан тухайн жилүүдийн турш монголын хүн амын өсөлт ямар хуулиар явагдаж ирснийг тэгшитгэлээр үзүүлэе.

1918 - 1940 он хүртэлх хүн амын өсөлтийн хурдны функцийг зохиоё. Энэ функц нь шугаман хэлбэртэй байгаа тул түүний өнцгийн коэффициентийг олбол :

$$K = \frac{0.2 - 1.01}{22} = -\frac{0.81}{22} = -0.0368 \quad \text{болно.}$$

Энэ функц нь шугаман хэлбэртэй учраас уг тэгшитгэл нь $K(t) = 1.01 - 0.037 * t$ болно.

Энэ функцээс $[0, t]$ завсар дээр интеграл авбал :

$$\int [1.01 - 0.037] dt = 1.01t - 0.018t^2$$

$$\text{Хүн амын өсөлтийн хурд нь } K = \frac{P(t) - P_0}{t * P_0} * 100 \quad \text{гэдгийг харгалзаж үзэн}$$

1918-1940 он хүртэлх хүн амын өсөлтийн хуулийг бичвэл :

$$P(t) = P(1918) * e^{(1.01t - 0.018t^2)/100} = 647,5 * e^{(1.01t - 0.018t^2)/100}$$

хэлбэртэй болно.

Жишээ 7. 1932 оны хүн амын тоог энэ хуулиар олохын тулд $t = 15$ гэж үзэх бөгөөд коэффициентийг нь бодвол :

$$K = \frac{1.01t - 0.02t^2}{100} = \frac{1.01*15 - 0.02*15^2}{100} = \frac{15.15 - 4.05}{100} = \frac{11.1}{100} = 0.111$$

Иймд 1932 оны хүн ам $P(1932) = 647,5 * e^{0.111} = 723,5$ байна.

Мөн үүнтэй ижилхнээр 1940 – 1950 оны хүн амын өсөлтийн хурд шугаман хэлбэртэй байгаа тул өсөлтийн хуулийг дээрхийн адил бичиж болно.

Үүнийг томъёолбол :

$$K = \frac{0.5 - 0.29}{32 - 22} = 0.021$$

$$K(t) = 0.2 + 0.021 * (t - 22) = 0.021t - 0.26 \quad \text{де/е} \quad K(t) = 0.021t - 0.26$$

болно.

$$K(t) dt = [0.021t^2 - 0.26] dt = [0.0105t^2 - 0.26t] = 0.0105t^2 - 0.26t - [0.0105 * 22^2 - 0.26 * 22] = 0.011t^2 - 0.26t + 0.64$$

$$P(t) = 738,6 * e^{\frac{0.011t^2 - 0.26t + 0.64}{100}}$$

Жишээ 8. 1944 оны тоог энэ хуулиар бодвол : ($t = 26$)

$$\frac{0.011*676 - 0.26*26 + 0.64}{100}$$

$$P(1944) = 738,6 * e$$

$$= 758,4$$

мянган хүнтэй байх тооцоо гарч байна.

3. 1950–1994 оны хүн амын өсөлтийн хурдны функцийг $P(t) = at^2 + bt + c$ гэсэн квадратлаг хэлбэрээр эрье. Функцийн a, b, c параметруудийг хамгийн бага квадратын аргаар олж. Үүнийг эхлээд дараах хүснэгтийг ашиглан ерөнхий тохиолдолд шийдье.

t	t1	t2	t3		tm
k	k1	k2	k3		km

t_i жилийн харгалзах хүн амын тоо K_i болог. Дараах хазайлтын функц зохиовол:

$$F(a,b,c) = S [K_i - (at + bt + c)] \rightarrow \min (4) \quad (S - \text{нийлбэр})$$

Тэгшитгэл (4)-д a, b, c нь үл мэдэгдэх параметрууд бөгөөд эдгээрийг үнэлэхдээ хамгийн бага квадратын аргыг ашиглана. Өөрөөр хэлбэл, a, b, c – параметруудийг сонгохдоо F функцийг хамгийн бага байлгах нөхцлөөс олно. Уул аргын мөн чанар нь дундаж утгаас ажиглалтын утгуудын хазайлтын квадрат минимум байхаар экстремум олох бодлого мэтээр тавигддагт оршино.

Хамгийн бага квадратын аргын нөхцлөөс доорх функцийг бичиж (4) тэгшитгэлийг коэффициентуудыг үнэлье. Иймийн тулд функцийн экстремум олох зайлшгүй нөхцлөөс a, b, c –г үнэлэхийн тулд дараах тэгшитгэлийн системийг бодох бөгөөд (4) тэгшитгэлийн хувьд экстремум байх зайлшгүй нөхцөлийг бичвэл :

$$\frac{dF}{da} = 2 S [K_i - (at^2 + bt + c)] (-t^2) = 0$$

$$\frac{dF}{db} = 2 S [K_i - (at^2 + bt + c)] (-t) = 0$$

$$\frac{dF}{dc} = 2 S [K_i - (at^2 + bt + c)] (-1) = 0$$

Энэ тэгшитгэлийн системийг дараах байдлаар хувиргавал :

$$a S t^4 + b S t^3 + c S t^2 = S K t^2$$

$$a S t^3 + b S t^2 + c S t = S K t$$

$$a S t^2 + b S t + c S = S K$$

Энэ системийг $m=5, t_1=32, t_2=42, t_3=52, t_4=62, t_5=72, k_1=2.12, k_2=2.76, k_3=2.91, k_4=2.48, k_5=1.8$ үед Гауссын аргаар бодоход $a=0.00525, b=0.5657, c=16565$ гэж гарна.

Үүнийг тэгшитгэлдээ орлуулбал:

$$K(t)dt = (at^2 + bt + c) dt = (a/3 * t^3 + b/2 * t^2 + c * t) | = a/3 * t^3 + b/2 * t^2 + c * t - (a/3 * (32)^3 + b/2 * (32)^2 + c * 32)$$

Иймд 1950–1990 оны хүн амын өсөлтийн хууль нь:

$$P(t) = P(1950) * e^{\frac{0.000175t + 0.28285 * t + 16.5665 * t - 650.2}{100}}$$

Жишээ : 1960 оны хүн амын тоог олбол : (t = 42)

$$\frac{0.000175 * 42 + 0.28285 * 42 + 16.5665 * 42 - 650.2}{100}$$

$$P(t) = P(1950) * e$$

= 799.7 мянга

Одоо зохицуулагдах өсөлтийн математик загварыг гаргая. Хүн амын өсөлтийн хурд нь зохиомлоор буурдаг гэж үзье. Бидний авч үзэж буй завсарт хүн амын өсөлтийн дээд хязгаар нь M болог. Хүн амын өсөлтийн хурд нь P ба M-P -ийн үржвэртэй шууд пропорциональ гэж үзье. Энэ тохиолдолд M-P бага байх үед өсөлтийн хурд удааширна. Тэгвэл,

$$\frac{dP}{dt} = kP(M - P) \quad \text{Үүнд, } K \text{ нь тогтмол коэффициент}$$

Энэ дифференциал тэгшитгэлийг хувиргавал,

$$\frac{dP}{P(M-P)} = k dt \quad \frac{1}{MP} + \frac{1}{M(M-P)} = dP = d(kt)$$

Хувьсагч ялгагдах дифференциал тэгшитгэл тул, тэгшитгэлийн баруун зүүн талуудыг интегралчилбал,

$$\frac{1}{MP} dt - \frac{1}{M} \frac{d(M-P)}{M-P} = k dt$$

$$\frac{1}{M} \ln P - \frac{1}{M} \ln(M-P) = k dt$$

$$\frac{1}{M} \ln \frac{P}{M-P} = k t + c \Rightarrow \ln \left(\frac{P}{M-P} \right) = Mkt + MC$$

Үүнийг хувиргавал,

$$\frac{P}{M-P} = e^{Mkt+MC} = e^{MC} * e^{Mkt} \quad (5)$$

$$e^{MC} * e^{Mkt} = s \text{ гэж үзвэл } \frac{P}{M-P} = s \text{ болох бөгөөд эндээс}$$

$$P = \frac{s * M}{1 + s} \quad (6)$$

$$1+s$$

Хэрвээ $t \Rightarrow$ тэмүүлж байвал $e \rightarrow$ тэмүүлнэ, мөн түүний өсөлтийн үйл явц $R > 0$ о-; $s \rightarrow$ тэмүүлнэ.

Мөн $t \rightarrow$ тэмүүлэх үед $s/(1+s) \rightarrow 1$ (6)–оос хамаарч $P \rightarrow M$ рүү тэмүүлнэ.

Өөрөөр хэлбэл,

$$\begin{aligned} \frac{M-P}{P} &= \frac{1}{e^{MC} * e^{Mkt}} \\ M-P &= \frac{P}{e^{MC} * e^{Mkt}} \Rightarrow P \left(\frac{1}{e^{MC} * e^{Mkt}} + 1 \right) = M \\ P \left(\frac{1 + e^{MC} * e^{Mkt}}{e^{MC} * e^{Mkt}} \right) &= M \Rightarrow \\ P &= \frac{M * e^{MC} * e^{Mkt}}{1 + e^{MC} * e^{Mkt}} \end{aligned}$$

Үүнийг тодорхой ойлгохын тулд хугацааны $t=0$ үе дэхь хүн амын тоо P_0 гэдгийг харгалзан үзэж $P(t)$ –г олж.

$$P(0) = P = \frac{M * e^{Mc}}{Mc} \Rightarrow$$

$$P_0 (1 + e^{Mc}) = M e^{Mc} \Rightarrow P_0 + P_0 e^{Mc} = M e^{Mc}$$

$$e^{Mc} * (M - P_0) = P_0 \Rightarrow e^{Mc} = \frac{P_0}{M - P_0}$$

$$P(t) = \frac{M e^{Mkt} \frac{P_0}{(M - P_0) - P_0}}{1 + e^{Mkt} \frac{P_0}{(M - P_0)}} = \frac{M e^{Mkt} P_0}{(M - P_0) + P_0 e^{Mkt}} = \frac{M e^{Mkt} P_0}{(M - P_0) + P_0 e^{Mkt}}$$

$$= \frac{MP_0}{P_0 + (M - P_0) e^{-Mkt}}$$

$$P = \frac{MP_0}{P_0 + (M - P_0) e^{-Mkt}}$$

Одоо туршилтийн өгөдлүүдийг ашиглан дээрх функцний гарамтр K –г тодорхойлох аргыг авч үзье.

t	t1	t2	...	tm
P	P1	P2		Pm

Үүнийг хамгийн бага квадратын аргаар тодорхойлно.

$$F = S [P_i - P(t_i)]^2 \rightarrow \min$$

$$F(k) = S \left[P_i - \frac{M P_0}{P_0 + (M - P_0)e^{-Mkt}} \right]^2$$

$$F' = 2 \left(P_i - \frac{M P_0}{P_0 + (M - P_0)e^{-Mkt}} \right) \left(M P_0 \frac{(M - P_0)(-M t_i)e^{-Mkt}}{(P_0 + (M - P_0)e^{-Mkt})^2} \right) =$$

$$= 2 \left(P_i - \frac{M P_0}{P_0 + (M - P_0)e^{-Mkt}} \right) \frac{M^2 P_0 t_i (M - P_0)e^{-Mkt}}{(P_0 + (M - P_0)e^{-Mkt})^2} = 0$$

Энэхүү трансцендент тэгшитгэлийг бодож к гарамтрийг тодорхойлж болно.

Мөн тухайн авч буй хугацааны хүн амын тооны дээд хязгаар М нь үл мэдэгдэх хэлбэрээр өгөгдсөн үед хамгийн бага квадратын аргаар үүнийг олж болно.

$$F(k, M) = S [P_i - P(t)]^2 \rightarrow \min$$

Энэхүү бодлогын экстремум байх зайлшгүй нөхцөлийг бичвэл :

$$\frac{dF}{dK} = 0, \quad \frac{dF}{dM} = 0$$

$$\frac{dF}{dK} = 2 \left(P_i - \frac{M P_0}{P_0 + (M - P_0)e^{-Mkt}} \right) \frac{M^2 P_0 t_i (M - P_0)e^{-Mkt}}{(P_0 + (M - P_0)e^{-Mkt})^2} = 0$$

$$\frac{dF}{dM} = 2 \left(P_i - \frac{M P_0}{P_0 + (M - P_0)e^{-Mkt}} \right) \frac{P_0 - M P_0 e^{-Mkt} + (M - P_0)e^{-Mkt} (-K t_i)}{(P_0 + (M - P_0)e^{-Mkt})^2} =$$

$$= 2 \left(P_i - \frac{M P_0}{P_0 + (M - P_0)e^{-Mkt}} \right) \frac{P_0 (1 - e^{-Mkt} (M + (M - P_0)kt_i))}{(P_0 + (M - P_0)e^{-Mkt})^2} = 0$$

Дээрх шугаман бус тэгшитгэлүүдийн системийг бодож К ба М параметруудийг тодорхойлно.

Ерөнхийдөө, $P(t)$ функцийн графикийг ложистик муруй гэж нэрлэх бөгөөд хүн амын өсөлтийг урт биш хугацаанд төлөвлөхөд хэрэглэдэг. Гэхдээ энэ муруйг зөвхөн хүн амын эерэг налалттай тохиолдолд хэрэглэнэ гэдгийг анхаарах ёстой.

Одоо хүн амын өсөлтийн хурдыг 1990–2019 он хүртэл хүн амын өсөлтийн хуулийг бичье.

Үүний тулд $P(t)$ муруйн гарамтр К –г тодорхойлох энгийн грактик аргыг авч үзье.

1993 – 2006 он хүртэлх хүн амын өсөлтийн хуулийг бичвэл:

$$P_0 = P(1993)$$

$$M = P(2006)$$

$$P(1995) = \frac{MP_0}{P_0 + (M - P_0)e^{-Mk^2}}$$

Тү; $t(1993)=0$, $t(1994)=1$, $t(1995)=2$ гэж үзэв. Дээрх тэгшитгэлээс K –г олъя :

$$(P_0 + (M - P_0)e^{-2Mk}) * P(1995) = MP_0$$

$$(M - P_0)e^{-2Mk} = \frac{MP_0}{P(1995)} - P_0 = P_0 \left[\frac{M}{P(1995)} - 1 \right]$$

$$e^{-2Mk} = \frac{P_0}{(M - P_0)} \frac{(M - P(1995))}{P(1995)} \quad \text{Эндээс натурал логарифм авбал,}$$

$$\ln e^{-2Mk} = \ln \frac{P_0}{(M - P_0)} \frac{(M - P(1995))}{P(1995)} \Rightarrow$$

$$K = -\frac{1}{2M} \ln \frac{P_0(M - P(1995))}{(M - P_0)P(1995)}$$

Түүнээс гадна 2-р хувилбарыг ашиглан хүн амын өсөлтийн хурдны функц зохиоё.

$$K_1 = \frac{2.2 - 1.5}{13 - 0} = 0.053$$

$$K(t) = 1.5 + K_1 t = 1.5 + 0.053 t$$

2006 – 2019 он хүртэлх хурдны функц нь

$$K_2 = \frac{1.62 - 2.2}{26 - 13} = -0.044 \Rightarrow$$

$$\text{Nab; } K(t) - 2.2 = K_2(t - 13)$$

$$K(t) = 2.2 - 0.044(t - 13)$$

Ерөнхийд нь 1993–2019 он хүртэлх хүн амын өсөлтийн хурдны функцийг нэгтгэж бичвэл:

$$K(t) = \begin{cases} 1.5 + 0.053 t, & t \in [0, 13] \quad (1993 - 2006) \\ 2.2 - 0.044(t - 13), & t \in [13, 26] \quad (2006 - 2019) \end{cases}$$

Хурдны функцийг ашиглан 2001 хүн амын тоог томъёог ашиглан бодвол :

$$P(2001) = P(1993) e^{\int_0^7 (1.5 + 0.05t) dt / 100} = P(1993) e^{\frac{[(1.5t + 0.025t^2) / 100]}{100}} =$$

$$= 2215.0 e^{0.099} = 2445.5$$

$$P(2015) = 2215.0 e^{[(2.2-0.044(t-13))/100]dt} = 2215.0 * e^{(2.8t - 0.022t^2)/100} = 2215.0 * 1.66 = 3676.9 \text{ хүнтэй}$$

байх тооцоо гарч байна.

Ийнхүү хүн амын өсөлтийн загварыг шугаман болон ложистик функц хэлбэрээр математик талаас нь зохиож болно. Гэвч энэ тэгшитгэлийн шийд болох ложистик муруйн бүх параметрийг үнэлэх явдал нилээд хүндрэлтэй юм.

Ашигласан материал

Р.Патак "Хүн ам зүйн шинжилгээ", 1992, Бомбей Энэтхэг

НҮБ Хүн амын сан "Хүн амын загвар, хэтийн тооцоо" 1993, Чикаго, АНУ

Колин Неювэлл "Хүн ам зүйн арга загварууд" 1991, Лондон, Англи

НҮБ Хүн амын сан "Хүн амын хэтийн тооцоо, аргачлал" 1984, АНУ