

## ГИНЖИН ҮЕ ШАТНЫ АРГЫН ӨРГӨТГӨЛ

Б.Барсболд\*, О.Дударий\*\*, Д.Энхтайван\*\*\*, Г.Дэнзэн\*\*\*\*

**Хураангуй:** Даатгалын компани нөхөн олговор олгох зорилгоор тодорхой хэмжээний мөнгөн хөрөнгийг үе шаттайгаар нөөцөнд байлгаж, сан үүсгэдэг. Хохирол учирсан тохиолдолд энэхүү сангаас төлбөр хийж, хураамжийн орлогын тодорхой хэсгийг ийм санд нөөцөлдөг. Нөөц санг *ашиглаагүй хураамжийн нөөц, бүртгэсэн боловч барагдуулаагүй хохирлын нөөц, учирсан боловч бүртгэгдээгүй хохирлын нөөц, тогтворжуулах нөөц* гэх мэт ангилдаг. Эдгээрээс *учирсан боловч бүртгэгдээгүй хохирлын нөөц* (УББХН – IBNR – *incurred but not reported*)-ийг тооцоолдог нэгэн аргыг бид авч үзэж судлана. Гинжин үе шатны арга (ГҮША)-ын тусламжтай УББХН-ийн хэмжээг тогтоодог. Уг аргын үр дүнтэй эсэх нь тухайн даатгалын бүтээгдэхүүний онцлогоос ихээхэн хамааралтай. Нөхөн олговрын түүхэн өгөгдөл тодорхой зүй тогтолтой, тодорхой шинж чанарыг хангах нөхцөлд ГҮША үр дүнтэй. Энэхүү судалгааны хүрээнд ГҮША-ын үндэслэлийг математик статистикийн онолын үүднээс тайлбарлана. Үүний дүнд авч үзэж буй түүвэрт хэдийд уг аргыг хэрэглэж болох, хэдийд болохгүйг тодорхойлох аргачлал боловсруулсан. Цаашилбал ГҮША-г ашиглахад тохиромж муутай түүврийн хувьд нэгэн шинэ аргачлалыг боловсруулж туршсан. Энэхүү шинэ аргачлал нь гинжин үе шатны аргын шууд өргөтгөл нь болж байгаагаараа онцлог. Туршилтын үр дүнгээс харвал бидний боловсруулсан аргачлал манай орны нөхцөлд даатгалын компанийн нөөц сангийн тооцоонд ашиглахад илүү тохиромжтой нь харагдаж байна.

**Түлхүүр үгс:** *гинжин үе шатны арга, цндсэн бүрэлдэхүүний шинжилгээ, шугаман регресс, нөхөн олговрын нөөц сан, ослын жил, үйцэтгэлийн жил*

### EXTENSION TO CHAIN LADDER METHOD

**Abstract:** An insurance company holds in reserve a certain amount of money with the purpose of settle claims. When claims are reported, payments are made from the reserved fund and a certain part of premium is held in this purpose. Reserves are classified as *unearned premium reserve (UPR), reported and not yet settled (RBNS), incurred but not yet reported (IBNR), stabilization reserve, etc.* Among these, we will consider and study a method estimating IBNR. It is estimated using the Chain Ladder Method (CLM). The effectiveness of it depends greatly on the specifics of the insurance product and it is effective when historical accident data follows certain patterns.

In this research, we give mathematical description to CLM. Based on it we propose criterion, which decides whether CLM is appropriate to apply for given data or not. Furthermore, we developed a new method and tested it for samples were not suitable for the use of classical CLM. Our new method is a mathematically direct extension to CLM. We had tested the new method using real-world data from domestic insurance company. In case of this data the classical CLM was not suitable for reserve estimation. But the newly developed method estimates IBNR losses more adequate to the real-life claims data.

**Keywords:** Chain ladder method, principal component analysis, linear regression, incurred but not reported losses, accident year, development year

\* МУИС-ийн ХШУИС (E-mail): barsbold@seas.num.edu.mn

\*\* Улаанбаатар Хотын Даатгал ХХК (E-mail): dudarii.ubci@gmail.com

\*\*\* МУИС-ийн ХШУИС (E-mail): Do.enkhtaivan@gmail.com

\*\*\*\* МУИС-ийн ХШУИС (E-mail): denzen\_g@yahoo.com

## Удиртгал

Гинжин үе шатны арга нь актуар тооцоонд түгээмэл ашиглагддаг, нөхөн төлбөр нөөцлөх үндсэн хэрэгсэл. Үүнтэй төстэй Борнхьютер – Фергусон, кэйп кодын гэх мэт олон янзын аргууд байдаг (*Schmidt & Zocher, 2008*). Эдгээр аргуудыг тухайн даатгалын бүтээгдэхүүн, тоон түүврийн онцлогт тохируулж хэрэглэдэг (*Bowers et al. 1997*). Нөхөн төлбөрийн нөөц санг (IBNR-incurred but not reported-учирсан боловч нэхэмжлээгүй хохиролын нөөц сан) ослын жил, гүйцэтгэлийн жилээс нь хамааруулж гурвалжин хүснэгтэд бүртгэдэг. Иймд уг түүвэр нь олон хэмжээстэй тоон өгөгдөл юм. Олон хэмжээст түүврийн харилцан хамаарал, зүй тогтлыг үндсэн бүрэлдэхүүний шинжилгээгээр (PCA-principal component analysis) тодорхойлдог. Энэхүү судалгааны хүрээнд нөхөн төлбөрийн нөөц сангийн түүхэн өгөгдөлд үндсэн бүрэлдэхүүний шинжилгээ хийсэн. Үүний дүнд түүврийн харилцан хамаарлыг илэрхийлэх гол чиглэл, хазайлтын үндсэн чиг зэргийг тодорхойлсон.

Нөхөн төлбөрийн ажиглалтын утгууд тодорхой нэг чиглэлийн дагуу тархан байршсан тохиолдолд гинжин үе шатны аргыг ашиглах нь тохиромжтой (*Wythrich & Merz 2008*). Харин ажиглалтын утгууд хоёр ба түүнээс дээш чиглэлд тархсан байвал гинжин үе шатны аргыг сонгодог байдлаар ашиглах нь тохиромжгүй. Үүнийг бид 2 төрлийн тоон өгөгдөл дээр туршиж шалгасан. Нөхөн төлбөрийн ажиглалтын утгууд нь олон хэмжээстэй.

ГҮША нь олон хэмжээст түүврийн зөвхөн 1-р үндсэн бүрэлдэхүүний хувьд регрессийн коэффициентийг тодорхойлж буйг бид тогтоосон. Гэтэл манай орны нөхцөлд даатгалын зарим бүтээгдэхүүний хувьд ГҮША хэрэглэх нь төдий тохиромжтой биш байна. Үүний шалтгаан нь нөхөн төлбөрийн ажиглалтын гурвалжин өгөгдлийн дисперс зөвхөн 1 биш 2 ба түүнээс дээш үндсэн бүрэлдэхүүн хэсэгтэй байгаад оршино. Энэ ажиглалт нь энэхүү ажлын судалгааны зүйлийг тодорхойлно. Үүний үндсэн дээр нөхөн төлбөрийг нөөцлөхдөө зөвхөн 1 үндсэн бүрэлдэхүүн биш ядаж 2 үндсэн бүрэлдэхүүнийг тооцох хэрэгтэй гэсэн таамаглалыг дэвшүүлж байна.

Шинээр боловсруулсан аргачлалаа бид тоон өгөгдөл дээр туршиж нааштай үр дүнд хүрсэн. Бидний дэвшүүлж буй аргачлал нь онол, практикийн аль аль талаасаа шинэлэг үр дүн юм. ГҮША-ын үндэслэлийг үндсэн бүрэлдэхүүний шинжилгээтэй холбож тайбарлаж, түүнийг 2 бүрэлдэхүүнт регрессээр өргөтгөх талаар энэ чиглэлийн мэргэжлийн олон улсын сэтгүүл, хэвлэлд урд өмнө нийтлэгдээгүй байгаа. ГҮША-ын математик статистикийн онолын үндэслэлийг тайлбарлаж, үүний үндсэн дээр үндсэн аргачлалаар шинжилгээ хийхэд тохиромжгүй өгөгдлийн хувьд шинэ арга боловсруулж, үр дүнг бодит өгөгдлийн хувьд туршиж, баталгаажууллаа. Бидний гүйцэтгэсэн судалгаа,

боловсруулсан аргачлал нь олон улсын түвшинд судалгаа, шинжилгээ, онол, практикийн чухал ач холбогдолтой гэж үзэж байна.

УББХН-ийн тооцоололд ГҮША-ыг шууд хэрэглэх нь манай орны даатгалын салбарын тоон өгөгдлийн хувьд төдий тохиромжтой байдаггүй. Тэгвэл манай орны хувьд ямар арга аргачлалаар УББХН-ийг тооцох вэ гэсэн асуудал урган гарч байна. Энэхүү судалгааны хүрээнд манай орны хувьд тохирох арга боловсруулах үндсэн зорилго тавьсан. Үүний тулд ГҮША-ыг онолын үүднээс задлан шинжилж, тайлбарлах хэрэгцээ гарсан. ГҮША нь 1 үндсэн бүрэлдэхүүнт шинжилгээ болохыг олж тогтоосон. Үүний үндсэн дээр үндсэн бүрэлдэхүүний шинжилгээг 2 бүрэлдэхүүнтэй болгож өргөтгөвөл нэгдүгээрт ГҮША-ын шууд өргөтгөл болно, хоёрдугаарт манай орны тоон өгөгдөлд тохирох арга болно. Иймд 2 үндсэн бүрэлдэхүүнтэй шинжилгээ хийх зорилт тавьсан. Энэхүү зорилт нь бидний дэвшүүлсэн зорилготой онол болон практикийн аль аль талаасаа бүрэн дүүрэн нийцэж байгаа нь тоон туршилтын үр дүнгээс харагдаж байна.

Энэхүү судалгааны ажил нь дараах бүлгүүдээс бүрдэнэ. Эхлээд бид гинжин үе шатны арга, нөхөн олговрын нөөц санг тооцох аргачлалын талаар товч тайлбарлана.

Хоёрдугаар бүлэгт үндсэн бүрэлдэхүүний шинжилгээг танилцуулна. Улмаар нөхөн олговрын нэгэн түүврийн хувьд үндсэн бүрэлдэхүүний задаргаа хийж хамаарлын түвшинг тодорхойлно.

Цаашилбал гинжин үе шатны сонгодог арга нь 1 үндсэн бүрэлдэхүүний хувьд хийгдэх регрессийн шинжилгээ болохыг харуулсан. Гинжин үе шатны аргыг үндсэн бүрэлдэхүүний шинжилгээнд суурилж өргөтгөж болно гэж үзүүлээ.

Гуравдугаар бүлэг нь тоон шинжилгээний хэсэг юм. Энд нөхөн олговрын нэгэн түүврийн хувьд 2 үндсэн бүрэлдэхүүнтэй регрессийн шинжилгээ хийж, нөхөн төлбөр нөөцлөх таамаглал боловсруулсан.

## **Гинжин үе шатны арга**

### **Үндсэн ойлголт, тэмдэглэгээ**

Хохирол гарсан жилийг ослын, түүнээс хойш нэхэмжлэл гарсан жилийг гүйцэтгэлийн жил гээ.  $n$  нь ослын жилийн нийт тоо болог. Тэгвэл  $i$ -р ослын жилд  $j = 1, \dots, n - i + 1$  хүртэл гүйцэтгэлийн жилийн нэхэмжлэлүүд тодорхой болсон байна. Цаашид бид дараах тэмдэглэгээнүүдийг ашиглана.

$z_{ij}$  - ослын  $i$ -р, гүйцэтгэлийн  $j$ -р жилд үүссэн нэхэмжлэл

$c_{ij}$  - ослын  $i$ -р, гүйцэтгэлийн  $j$ -р жилд хуримтлагдсан нэхэмжлэл

$f_{ij}$  - ослын  $i$ -р,  $j$ -р жилийн гүйцэтгэлийн коэффициент

$c_{in}$  - ослын  $i$ -р жилийн нийт нэхэмжлэл тус тус болог.

Ослын  $i = 1, \dots, n$  жилүүдэд үүссэн  $z_{ij} (j = 1, \dots, n - i + 1)$  нэхэмжлэлүүдийг нэгтгэж матриц хэлбэртэй дүрсэлбэл

$$\begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1n} \\ z_{21} & \dots & z_{2n-1} & ? \\ \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ z_{n1} & ? & \dots & ? \end{pmatrix}$$

болно. Нөөц сан тооцох аргын үндсэн зорилго нь дээд гурвалжин матрицийн өгөгдөлд тулгуурлаад доод гурвалжин хэсгийг нь урьдчилан таамаглаж байгуулах юм. Ослын  $i = 1, \dots, n$  жилүүдэд хуримтлагдсан  $c_{ij} (j = 1, \dots, n - i + 1)$  нэхэмжлэлүүдийг нэгтгэж матриц хэлбэртэй дүрсэлбэл

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & \dots & c_{2n-1} & ? \\ \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ c_{n1} & ? & \dots & ? \end{pmatrix}$$

болно. Хуримтлагдсан нэхэмжлэлийг үүссэн нэхэмжлэлүүдийн тусламжтайгаар

$$c_{ij} = \sum_{n=1}^j z_{in} \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n - i + 1$$

гэж тооцно. Үүссэн нэхэмжлэлүүдийг хуримтлагдсан нэхэмжлэлүүдийн тусламжтайгаар

$$z_{ij} = \begin{cases} c_{ij} & \text{хэрэв } j = 1 \\ c_{ij} - c_{ij-1} & \text{хэрэв } 2 \leq j \leq n - i + 1 \end{cases}$$

аргаар олно. Дээр дурьдсан нэхэмжлэлүүд нь ослын  $n$  жилүүдэд ажиглагдсан бодитой нөхөн олговрын хэмжээ юм.

Учирсан боловч нэхэмжлээгүй хохиролд нөөцлөхийн тулд ажиглалтаас цааших жилүүдэд үүсэх нэхэмжлэлүүдийг урьдчилан таамаглах ёстой. Үүний тулд ажиглалтууддаа тулгуурлан ослын  $i = 1, \dots, n$ , гүйцэтгэлийн

$j = n - i + 2, \dots, n$  жилүүдийн үүссэн  $z_{ij}$ , эсвэл хуримтлагдсан  $c_{ij}$  нэхэмжлэлүүдийг урьдчилан таамаглахад хангалттай.

Үүссэн ба хуримтлагдсан нэхэмжлэлийн гурвалжин матрицуудад тулгуурласан учирсан боловч нэхэмжлээгүй хохиролын нөөцийг үнэлэх хэд хэдэн аргууд байдаг. Эдгээр аргууд нь тухайн эрсдлийн тархалтыг мэдэгдэхгүй гэж үздэг. Харин нэхэмжлэлийн хэмжээ нь ослын ба гүйцэтгэлийн нэг жилээс нөгөөд шилжихэд тодорхой зүй тогтол хэв шинжийг хадгалдаг гэж үздэг. Энэ нь гүйцэтгэлийн гурвалжинд суурилсан аргуудын үндсэн онцлог.

## 1.2 Аргачлал

Гинжин үе шатны арга нь зөвхөн дараах таамаглалууд биелэх нөхцөлд үр дүнтэй (Gould, 2008). Үүнд:

- А. Ослын жилүүд харилцан үл хамаарах санамсаргүй хэмжигдэхүүн.  
 Б.  $c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{ik}, \dots$  хуримтлагдсан нэхэмжлэлүүд нь Марковын хэлхээ үүсгэнэ.

$$E(c_{ij} | c_{i1}, \dots, c_{ij-1}) = E(c_{ij} | c_{ij})$$

- В. Гүйцэтгэлийн  $j = 2, \dots, n$  жил бүрийн хувьд

$$\frac{Ec_{1j}}{c_{1j-1}}, \dots, \frac{Ec_{nj}}{c_{nj-1}}$$

харьцаануудыг тогтмол гэж үздэг. Өөрөөр хэлбэл дээрх харьцаа ослын жилээс хамаарахгүй.

**Тодорхойлолт:** Гүйцэтгэлийн  $j$ -р жилийн хувьд ( $j = 2, \dots, n$ )

$$f_j = \frac{Ec_{ij}}{Ec_{ij-1}}$$

харьцааг шилжилтийн коэффициент гэнэ.

Шилжилтийн коэффициентийг гүйцэтгэлийн гурвалжинг ашиглаж үнэлэх гинжин шатны аргатай танилцая. Гүйцэтгэлийн  $j$ -р жилийн хувьд хуримтлагдсан нөхөн төлбөрийн дундаж утга нь:

$$Ec_{ij} = \frac{1}{i} \sum_{k=1}^i c_{kj}$$

гэж үнэлнэ. Иймд гүйцэтгэлийн коэффициентийн үнэлгээ нь:

$$f_j = \frac{\sum_{k=1}^i c_{kj}}{\sum_{k=1}^i c_{kj-1}}$$

гэж олдоно.

### Үндсэн бүрэлдэхүүний шинжилгээ

### Үндсэн бүрэлдэхүүний арга

$n$  урттай вектор санамсаргүй хэмжигдэхүүнийг  $\rho$  удаа ажиглахад  $n \times \rho$  хэмжээтэй  $X$  матриц үүссэн байг.  $X$  түүврийн дисперс ямар чиглэлд хамгийн их байхыг тодорхойлж. Үүний тулд

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{1}{2} v^T \delta(X) v \\ & \begin{cases} v^T v = 1 \\ v \in R^n \end{cases} \end{aligned}$$

бодлогыг бодно. Энд  $\delta(X)$  нь  $x$  түүврийн ковариацийн матриц бөгөөд  $\delta(X) = E(X - EX)(X - EX)^T$  гэж өгөгдөнө. Дээрх бодлогын Лагранжийн функцийг зохиож, шийдийн зайлшгүй нөхцлийг тогтооё.

$$L = \frac{1}{2} v^T \delta(X) v - \frac{\lambda}{2} v^T v \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{\partial L}{\partial v} = \delta(X) v - \lambda v \quad \Rightarrow \quad \delta(X) v = \lambda v$$

тул  $(\lambda, v)$  нь  $\delta(X)$  матрицийн хувийн хос болно. Иймд бодлогын шийд  $\delta(X)$  матрицийн хамгийн их хувийн утгад харгалзах хувийн вектор байна. Өөрөөр хэлбэл, ковариацийн матрицийн хамгийн их хувийн утгад харгалзах хувийн векторын чиглэлд  $X$  түүвэр дундажаасаа хамгийн их хазайна.  $\delta(X)$  матриц тэгш хэмтэй учраас хувийн утгууд нь бодит байна. Түүнчлэн

$$\forall v \in R^n \quad v^T \delta(X) v = v^T E(X - EX)(X - EX)^T v = E[(X - EX)^T v]^2 \geq 0$$

тул  $\delta(X)$  нь сөрөг биш тодорхойлогдсон буюу хувийн утгууд нь сөрөг биш байна.  $\delta(X)$  матрицийн хувийн утгууд  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$  гэж эрэмбэлэгдсэн, харгалзах хувийн векторууд нь  $v^1, \dots, v^n$  гэж дугаарлагдсан байг. Дараах тэмдэглэгээнүүдийг оруулья. Үүнд

$$V = (v^1, \dots, v^n), \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

тус тус болог. Тэгвэл  $\delta(X)$  матриц

$$\delta(X) = V D V^T = V \Sigma \Sigma^T V^T$$

гэж задарна. Эндээс  $X$  түүврийн дундаж хазайлт үндсэн бүрэлдэхүүнүүдээрээ

$$E(X - EX) = V \Sigma$$

гэж задарна.

Ажиглалтын тоо хангалттай их бол олон хэмжээст түүврийн ковариацийн матрицийн хувийн утгуудын ихэнх нь тэг эсвэл тэгд ойрхон байх нь элбэг. Ийм түүврийн дундаж хазайлтыг ковариацийн матрицийнх нь цөөн хэдэн хувийн утга, хувийн вектороор хангалттай сайн илэрхийлж болдог.  $X$  түүврийн ковариацийн матрицийн  $k$  хувийн утгууд хангалттай их тоо байг.  $V_k, \Sigma_k$  матрицуудыг

$$V_k = (v^1, \dots, v^k), \quad \Sigma_k = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sqrt{\lambda_k} \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, n$$

гэж тодорхойлъя. Тэгвэл  $X$  түүврийн дундаж хазайлтыг цөөн хэдэн үндсэн бүрэлдэхүүнийх нь тусламжтай харьцангуй бүрэн илэрхийлж болно. Өөрөөр хэлбэл  $k = 1, \dots, n$  бүрийн хувьд

$$E(X - EX) \in \text{span } V_k$$

нөхцөл өндөр магадлалтай биелнэ. Энд  $\text{span } V_k$  нь  $(v^1, \dots, v^k)$  багануудаар үүсгэгдсэн шугаман дэд огторгуй.

### Гинжин үе шатны аргын онолын үндэслэлийг тайлбарлах нь

ГҮША нь гүйцэтгэлийн нэг жилээс нөгөөд шилжихэд нөхөн төлбөрийн өгөгдөл тодорхой зүй тогтлыг хангадаг гэж үздэг. Ингээд гүйцэтгэлийн жил тус бүрийн хувьд  $f_1, f_2, \dots, f_{n-1}$  гэсэн шилжилтийн коэффициентүүдийг тооцдог. Үүний үндсэн дээр нөхөн олговрын утгыг

$$z_{ij+1} = f_j z_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n - i + 1$$

гэсэн рекурсив хуулиар өгөгдөж гэж үздэг. Дээрх томъёог  $j$ -ийн хувьд бууруулж бичвэл:

$$z_{ij+1} = f_j f_{j-1} z_{ij-1} = \dots = f_j f_{j-1} \dots f_1 z_{i1}$$

$i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n - i + 1$  гэсэн үр дүнд хүрнэ. Эндээс  $z_{ij}$  үүссэн нэхэмжлэлийн баганууд бүгд

$$\begin{pmatrix} z_{11} \\ z_{21} \\ z_{31} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_{11} \\ z_{21} \\ z_{31} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} z_{11} \\ \vdots \\ z_{n1} \end{pmatrix}$$

векторуудын дагуу чиглэлтэй шулууны орчинд байрлана гэсэн үг. Өөрөөр хэлбэл ГҮША нь өгөгдөл олон хэмжээст түүврийн 1-р үндсэн бүрэлдэхүүнийг

байгуулж, таамаглал боловсруулдаг байна. ГҮША-д хуримтлагдсан нөхөн төлбөрүүд Марков чанартай гэсэн таамаглал биелэхийг шаарддаг. Энэ шаардлага нөхөн олговрын түүвэр бүрийн хувьд биелэх албагүй. Яагаад гэвэл түүвэрт 2 дугаар үндсэн бүрэлдэхүүний нөлөө байх боломжтой. Үүнийг дараах тоон өгөгдөл дээр тайлбарлая.

Хүснэгт 1. Монголын нэгэн даатгалын компанийн жолоочийн хариуцлагын албан журмын даатгалын тоон өгөгдөл

	1	2	3	4	5	6
<b>2011.I</b>	499 700.0	1 101 390.0	4 834 980.0	2 743 000.0	722 250.0	500 000.0
<b>2011.II</b>	2 353 200.0	4 278 800.0	3 292 340.0	2 743 000.0	1 179 000.0	
<b>2011.III</b>	1 966 200.0	4 231 700.0	3 292 340.0	8 810 636.0		
<b>2011.IV</b>	1 966 200.0	4 231 700.0	8 882 312.0			
<b>2012.I</b>	2 865 184.0	9 984 712.0				
<b>2012.II</b>	8 804 158.0					

Дээрх тоон өгөгдөл нь манай улсын нэгэн даатгалын компанийн жолоочийн хариуцлагын албан журмын даатгалын тоон өгөгдөл болно. Өөр бусад даатгалын компанийн өгөгдлүүд дээр үндсэн бүрэлдэхүүний шинжилгээ хийхэд төстэй үр дүн гарсан. Дээрх гурвалжны мөр бүрийн хувьд үндсэн бүрэлдэхүүний задаргаа хийж үзье.

Хүснэгт 2. Хүснэгт 1 дэх тоон өгөгдлийн хувьд гүйцэтгэсэн үндсэн бүрэлдэхүүний шинжилгээ

499700	11013900	4834980	2743000	722250
2353200	4278800	3292340	2743000	1179000
-0.0039200000000000068123284790999605				
-0.0008589999999999995456412271721547				
-0.000487999999999999897755398325927				
0.00112				
2577000000000.0		(100%)		
499700	11013900	4834980	2743000	
2353200	4278800	3292340	2743000	
1966200	4231700	3292340	8810636	
-0.00000584000000000000000030737470403143				
0.000769				



7133000000000.0	(24.4%)	
22110000000000.0	(75.6%)	
499700	11013900	4834980
2353200	4278800	3292340
1966200	4231700	3292340
1966200	4231700	8882312
25000000000.0	(0.13%)	
6922000000000.0	(36.32%)	
12110000000000.0	(63.54%)	
499700	11013900	
2353200	4278800	
1966200	4231700	
1966200	4231700	
2865184	9984712	
6722000000000.0	(5.3%)	
12000000000000.0	(94.69)	

Дээрх задаргаанаас харвал 2 дугаар үндсэн бүрэлдэхүүний нөлөө 24.4%, 36.32%, 5.3% байна. Иймд нөөц сангийн тооцоололд ГҮША-ыг шууд хэрэглэх нь дээрх өгөгдлийн хувьд тохиромжгүй. Харин 2 дугаар үндсэн бүрэлдэхүүний нөлөө оруулж тооцох замаар гинжин үе шатны аргыг өргөтгөх нь зүйтэй.

### Гинжин үе шатны аргын өргөтгөл

#### Онолын үр дүн

Үндсэн бүрэлдэхүүний шинжилгээ нь ГҮША-ыг онолын үүднээс бүрэн тайлбарлаж, түүний өргөтгөсөн хувилбарыг боловсруулах үндэслэлийг тодорхойлж байгаа. Үндсэн бүрэлдэхүүний шинжилгээнд хазайлтын хэдэн хувийг илэрхийлж байгаагаас нь хамааруулаад 1 ба түүнээс дээш бүрэлдэхүүнээр нийт түүврээ илэрхийлдэг.

Өмнө бүлэгт авч үзсэн өгөгдлийн хувьд 2 үндсэн бүрэлдэхүүн оролцуулж тооцоход үндсэндээ нийт түүврийг хангалттай сайн илэрхийлж байна. Иймд нөхөн төлбөрийн гурвалжны  $z_{in-1+2}$  утгыг  $i = 2, 3, \dots, n$  бүрийн хувьд тодорхойлохдоо 2 үндсэн бүрэлдэхүүнтэй регресс ашиглах нь зүйтэй.  $u^i, v^i$  нь

$$z^i = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1n-i+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_{i1} & z_{i2} & \dots & z_{in-i+1} \end{pmatrix}$$

түүврийн 1, 2-р үндсэн бүрэлдэхүүний чиглэлүүд болог. Тэгвэл  $z_{i n-1+2}$  нөхөн төлбөрийн хэмжээг  $i = 2, 3, \dots, n$  бүрийн хувьд дараах аргачлалаар олно. Үүний тулд

$$\begin{pmatrix} z_{1 n-i+2} \\ \vdots \\ z_{i n-i+2} \end{pmatrix} - EX \in \text{span}(u^i v^i)$$

таамаглал биелнэ гэж үзнэ. Ингээд

$$(u^i v^i) \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{1 n-i+2} \\ \vdots \\ z_{i n-i+2} \end{pmatrix} - EX$$

гэсэн регрессийн тэгшитгэлээс  $\alpha_i, \beta_i \in R$  коэффициентуудийг үнэлээд

$$z_{i n-i+1} = \alpha_i z_{i n-i-1} + \beta_i z_{i n-i}$$

нөхцөлд орлуулж  $z_{in-i+1-2}$  -г  $i = 2, 3, \dots, n$  бүрийн хувьд таамаглана.

### Тоон шинжилгээ

2.2 дэд бүлэгт танилцуулсан тоон өгөгдлийн хувьд  $z_{in-1+2}$  утгыг  $i = 2, 3, \dots, n$  бүрийн хувьд бидний санал болгож буй аргачлалын дагуу 1, 2-р үндсэн бүрэлдэхүүнтэйгээр таамаглавал дараах үр дүнд хүрнэ.

Хүснэгт 3. Нөөц санг 2 үндсэн бүрэлдэхүүний нөлөөлөлтэй хийсэн тооцоо

	1	2	3	4	5	6
2011.I	499 700	1 101 390	4 834 980	2 743 000	722 250	500 000
2011.II	2 353 200	4 278 800	3 292 340	2 743 000	1 179 000	1 337 382
2011.III	1 966 200	4 231 700	3 292 340	8 810 636	9 483 703	
2011.IV	1 966 200	4 231 700	8 882 312	12 435 236		
2012.I	2 865 184	9 984 712	21 931 223			
2012.II	8 804 158	19 585 977				

Дараах хүснэгтэд бодит ажиглалтын утгууд өгөгдсөн байгаа. Бидний боловсруулсан аргачлалаар гаргасан таамаглалыг бодит үр дүнтэй харьцуулахад бага зэрэг ахиу нөөц үүсгэсэн байна.

Хүснэгт 4. Бодит нөхөн олговрын хэмжээг диагоналийн доод хэмэгт харуулав.

	1	2	3	4	5	6
2011.III	499 700	11 013 900	4 834 980	2 743 000	722 250	500 000
2011.IV	2 353 200	4 278 800	3 292 340	2 743 000	1 179 000	1 214 370
2012.I	1 966 200	4 231 700	3 292 340	8 810 636	9 163 061	
2012.II	1 966 200	4 231 700	8 882 312	8 882 312		
2012.III	2 865 184	9 984 712	19 969 424			
2012.IV	8 804 158	12 896 516				
2013.I						

Дараах хүснэгтэд сонгодог ГҮША-аар таамагласан үр дүнг харуулжээ. Эндээс үзвэл сонгодог ГҮША нь нөхөн олговрыг ослын 2, гүйцэтгэлийн 6-р улиралд бага зэрэг дутааж, ослын 6, гүйцэтгэлийн 2-р, ослын 4, гүйцэтгэлийн 4-р улирлуудад хэт их нөөцөлжээ. Иймд сонгодог ГҮША нь төдий л тогтвортой үр дүн үзүүлэхгүй байна. Бидний санал болгож буй аргачлал үүнтэй харьцуулахад бодит байдалд илүү дөхүү нөөц үүсгэж байна. Сонгодог ГҮША-ын хувьд квадратлаг алдаа 29 391 569 байгаа бол бидний санал болгож буй аргын хувьд 7 831 906 гарсан. Квадратлаг алдаа наад зах нь 4 дахин буурсан байна.

Хүснэгт 5. Сонгодог ГҮША-аар тооцсон нөхөн олговрын хэмжээг диагоналийн доод хэсэгт харуулав.

	1	2	3	4	5	6
2011.III	499 700	11 013 900	4 834 980	2 743 000	722 250	500 000
2011.IV	2 353 200	4 278 800	3 292 340	2 743 000	1 179 000	1 208 752
2012.I	1 966 200	4 231 700	3 292 340	8 810 636	9 338 085	
2012.II	1 966 200	4 231 700	8 882 312	21 108 659		
2012.III	2 865 184	9 984 712	21 391 686			
2012.IV	8 804 158	39 585 976				
2013.I						

### Дүгнэлт

ГҮША нь нөхөн олговрын гурвалжны өгөгдлийн хувьд 1-р үндсэн бүрэлдэхүүнд суурилж таамаглал боловсруулдаг болохыг бид тогтоолоо. Манай орны даатгалын зах зээлийн онцлогоос шалтгаалж ГҮША-ыг шууд хэрэглэх нь тохиромж муутай байна. Энэ нь түүвэрт 2-р үндсэн бүрэлдэхүүний нөлөө

өндөр байгаатай холбоотой. Иймд бид ГҮША-ыг 2 үндсэн бүрэлдэхүүнийг тооцсон байхаар өргөтгөж, тоон жишээн дээр туршив. Туршилтын үр дүн бидний боловсруулсан аргачлал сонгодог аргаас илүү найдвартай болохыг баталгаажуулж байна. Квадратлаг алдаа наад зах нь 4 дахин буурсан байна. Цаашид санал болгож буй аргачлалыг хэрэгжүүлэх програм хангамж боловсруулж, илүү өргөн хүрээтэй тоон өгөдлийн хувьд туршиж, програм хангамжийг зүгшрүүлэх чиглэлд судалгаа хийх шаардлага зүй ёсоор урган гарч байна.

### **Ашигласан материал**

- Bowers N.L., Gerber H.U., Hickman J.C. 1997. Actuarial Mathematics.
- Wьthrich M.V., Merz M., 2008. Stochastic Claims Reserving Methods in Non-Life Insurance, John Willey & Sons, England.
- Schmidt, K.D., Zocher, M. 2008. Bornhuetter-Ferguson as a General Principle of loss reserving, Manchester.
- Gould, I. L. 2008. Stochastic chain-ladder models in nonlife insurance, Master's thesis, The University of Bergen.
- Санхүүгийн зохицуулах хорооны сайт [frc.mn](http://frc.mn)