ВАЛЮТЫН ХАНШИЙН ЭРСДЭЛИЙН ШИНЖИЛГЭЭ

Г.Баттулга*, Х.Энхбаяр**

Хураангуй: 1990 оноос төвлөрсөн төлөвлөгөөт эдийн засгаас зах зээлийн нийгэмд шилжсэнээс хойш гадаад валютаар худалдаа арилжаа тогтмол хийх болсон. Банкны хувьд ханшийн тэгшитгэл нь гадаад валютын нээлттэй позицоос үүдсэн эрсдэлд хүргэдэг бол экпортлогч импортлогчидын хувьд тухайлсан гадаад валют ханшийн хэлбэлзлээс шалтгаалж эрсдэл үүсгэнэ. Иймд энэ ажлын хүрээнд гадаад валютын ханшийн богино хугацааны эрсдэлийг (дээд тал нь улирал) судлахыг зорьсон болно. Гадаад валютуудын логарифм өгөөжийн хамтын тархалтыг тогтоож чадвал улмаар цаашид гадаад валютын багцын эрсдэлийг тодорхойлох боломжтой болдог.

Энэ ажлын хүрээнд эхлээд эрсдэлийн удирдлагад ашиглагдаж буй арга, аргачлал, эрсдэлийг хэмжихэд нийтээр ашиглагдаж буй VaR, ES-ийг авч үзсэн. Тухайлбал, ES нь субаддитив чанарыг хангадаг учраас VaR-аас илүү эрсдэлийн хэмжээсээр тооцогддог. Орчин үед дэлхий нийтээр хүлээн зөвшөөрөгддөг санхүүгийн өгөөжийг загварчилдаг хамтын тархалтын дундаж-дисперс хольцын загвар, эллипслэг тархалтын загварыг авч үзсэн. Эдгээр загвар нь мэдээж хамгийн хялбар загвар болох хамтын нормал тархалтаас эрс давуу байдаг. Мөн тухайн үзэгдэл тохиолдох магадлал багатай боловч гарсан хойноо маш их хэмжээний алдагдал, хохирол учруулдаг экстремал үзэгдлийг загварчлах (санхүүд стресс тест хийхэд ашигладаг) EVT онолын хялбар загварууд болох GEV, POT аргуудыг авч үзсэн. Эцэст нь санхүүгийн хугацаан цувааны дунджийг загварчлах ARMA загвар, хэлбэлзлийг загварчлах ARCH, GARCH гэсэн хялбар загваруудын талаар дурьдаж, VaR, ES-ийг буцаан тестлэх талаар авч үзсэн болно.

** МУИС-ийн, Хэрэглээний шинжлэх ухаан инженерчлэлийн сургууль, ХМ тэнхим,
(Email) battulga_gan@yahoo.com

* ШУТИС-ийн, Хэрэглээний шинжлэх ухааны сургууль, Математикийн тэнхим
(Email) eegii33@gmail.com

Түлхүүр үг: Валютын ханш, Валютын ханшийн эрсдэл

Эрсдэлийн Удирдлагын Үндсэн Ойлголтууд

Эрсдэлийн хэмжилт

Эрсдэлтэй активуудаас бүрдэх багц болон тогтмол Δ хугацаа авч үзье. $F_L(l) = P(L \leq l)$ —ээр харгалзах алдагдлын санамсаргүй хэмжигдэхүүний тархалтын функцийг тэмдгэлье.

Тодорхойлолт. Ямар нэг итгэх түвшин $\alpha \in (0,1)$ өгөгдсөн байг. Тэгвэл α итгэх түвшин дэх багцын VaR гэж алдагдал L нь l-ийг давах магадлал $(1-\alpha)$-аас ихгүй байх хамгийн бага l тоог хэлнэ. Математик тэмдгэлгээ хэрэглэн тодорхойлбол:

$$VaR_\alpha = \inf\{l \in \mathbb{R}: P(L > l) \leq 1-\alpha\} = \inf\{l \in \mathbb{R}: F_L(l) \geq \alpha\} \quad (1.8)$$

Иймд магадлалын үүднээс VaR нь алдагдлын тархалтын энгийн квантил юм. α-ийн нийтлэг утгууд нь $\alpha = 0.95$ эсвэл $\alpha = 0.99$ байдаг. Зах зээлийн эрсдэлийн удирдлагад хугацаа Δ нь дийлэнхдээ 1 эсвэл 10 өдөр байдаг бол зээлийн, үйл ажиллагааны эрсдэлийн удирдлагад дийлэнхдээ 1 жил байдаг. α итгэх түвшин дэх VaR-ийн тодорхойлолт нь $(1-\alpha)$ —ээс бага магадлалтайгаар тохиолдох алдагдлын цар хэмжээний талаар ямар нэг мэдээлэл өгдөггүй байгааг анхаарах хэрэгтэй. Энэ нь VaR-ын ноцтой сул тал юм.

Тодорхойлолт (Өргөтгөсөн урвуу функц болон квантил функц).

- Ямар нэг өсдөг $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ хувьд түүний өргөтгөсөн урвуу функц гэж $T^{\leftarrow}(y) = \inf\{x \in \mathbb{R}: T(x) \geq y\}$-ийг хэлнэ. Энэ функцийн хувьд хоосон олонлогийн инфемумыг ∞ гэж үзнэ.
- Ямар нэг тархалтын функц F-ийн хувьд түүний өргөтгөсөн урвуу функц $F^{\leftarrow}$-ийг F-ийн квантил функц гэж нэрлэнэ. $\alpha \in (0,1)$ хувьд F-ийн α эрэмбийн квантил гэж дараах хэмжигдэхүүнийг хэлнэ:

$q_\alpha(F) = F^{\leftarrow}(y) = \inf\{x \in \mathbb{R}: F(x) \geq \alpha\}$ F тархалтын функцтэй X санамсаргүй хэмжигдэхүүний хувьд $q_\alpha(X) = q_\alpha(F)$ тэмдэглэгээг мөн ашиглах болно. Хүлээгдэж буй гарз (Expected Shortfall) нь VaR-тай тодорхой холбоосоор холбогддог. Энэ хэмжигдэхүүн нь өнөө үед эрсдэлийн удирдлагын практикт VaR-аас давуу гэж хүлээн зөвшөөрөгдсөн бөгөөд VaR-ын хувьд тулгардаг субаддитивтай холбоотой хүндрэлийг энэ хэмжигдэхүүн нь даван гарч чаддаг

Тодорхойлолт. L алдагдал нь $E(|L|) < \infty$ нөхцлийг хангах ба F_L тархалтын функцтэй байг. Тэгвэл $\alpha \in (0,1)$ итгэх түвшин дэх хүлээгдэж буй гарз гэж дараах хэмжигдэхүүнийг хэлнэ:

$$ES_\alpha = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 q_u(F_L)du \qquad (1.11)$$

энд $q_u(F_L) = F_L^{\leftarrow}(u)$ нь F_L-ийн квантил.

Иймд хүлээгдэж буй гарз нь VaR-тай дараах байдлаар холбогдоно.

$$ES_\alpha = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_u(L)du$$

Олон хэмжээст нормал тархалт

Тодорхойлолт. Хэрэв дараах нөхцөл биелэж байвал $X = (X_1, \ldots, X_d)^T$ векторыг олон хэмжээст нормал эсвэл Гауссын тархалттай гэж нэрлэнэ:

$X =^d \mu + AZ$Энд $Z = (Z_1, \ldots, Z_k)^T$ нь үл хамаарах нэгэн ижил тархалттай стандарт нормал тархалттай санамсаргүй хэмжигдхүүнүүдийн вектор ба $A \in \mathbb{R}^{d\times k}, \mu \in \mathbb{R}^d$ нь харгалзан тогтмолын матриц болон векторууд.

Олон хэмжээст тестүүд. Олон хэмжээст нормал тархалттай эсэхийг шалгахад уг тархалтын нэг хэмжээст тархалтууд нормал эсэхийг шалгах нь хангалттай бус. Копула онол ёсоор нэг хэмжээст тархалтууд нь нормал болович бүхэлдээ нормал биш тархалтын функцыг байгуулах боломжтой байдаг. Иймд бид хамтын нормалыг шалгах шаардлагатай. Хэрэв $X \sim N_d(\mu, \Sigma)$, Σ эерэг тодорхойлогдсон бол $(X-\mu)^T\Sigma^{-1}(X-\mu) \sim \chi_d^2$ болохыг харуулж болно. Энд χ_d^2-ээр d чөлөөний зэрэгтэй хи-квадрат тархалтыг тэмдгэлсэн. $\bar{X}$ болон S нь харгалзан μ, Σ параметрүүдийн түүврийн үнэлэлт байг. Дараах өгөгдлийг байгуулъя:

$$\{D_i^2 = (X_i - \bar{X})^T S^{-1}(X_i - \bar{X}): \quad i = 1, \ldots, n\}$$

D_i^2 бүрийн байгуулалтанд дунджийн вектор болон ковариацын матрицын үнэлэлтүүд байгаа учраас хоорондоо үл хамаарах биш. Үүнээс гадна тэг таамаглалын нөхцөлд D_i^2-ын нэг хэмжээст тархалт нь хи-квадрат тархалттай биш болович масштабласан бета тархалттай байна: $n(n-1)^{-2}D_i^2 \sim Beta\left(\frac{1}{2}d, \frac{1}{2}(n-d-1)\right)$. Хэдий тийм болович их n-ийн хувьд хи-квадрат тархалттай маш ойролцоо тархалттай байдаг. Иймд $D_1^2, \ldots, D_n^2$-үүдийг ойролцоогоор χ_d^2 тархалтаас авсан үл хамаарах нэгэн ижил тархалттай гэж үзэх үндэслэлтэй. Ингэснээр уг тархалтын эсрэг QQ-диаграммыг байгуулах боломжтой.

Олон хэмжээст эксцесс болон ассимитрийн коэффицент дээр үндэслэсэн олон хэмжээст нормал тархалтын тестүүд мөн байдаг. 1 хэмжээст ассимитрийн коэффицент, эксцессийн коэффицентийн адилаар бид дараах хэмжигдэхүүнүүдийг оруулж ирье:

$$b_d = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} D_{ij}^3, \quad k_d = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i^4 \qquad (2.1)$$

Энд D_i нь өмнөх D_i^2-аас язгуур авсан хэмжигдэхүүн бөгөөд X_i болон $\bar{X}$-ийн хоорондох Махаланобисийн зай гэж нэрлэдэг. Харин $D_{ij} = (X_i - X)^T S^{-1}(X_j - X)$-ийг $X_i - \bar{X}$ болон $X_j - X$-ийн хоорондох Махаланобисийн өнцөг гэж нэрлэнэ. Эдгээр хэмжигдэхүүнүүд нь $d = 1$ үед ердийн b, k-г өгнө. Олон хэмжээст нормалын тэг таамаглалын нөхцөлд эдгээр статистикуудын асимптот тархалтууд нь:

$$\frac{1}{6} n b_d \sim \chi^2_{\frac{d(d+1)(d+2)}{6}}, \qquad \frac{k_d - d(d+2)}{\sqrt{8d(d+2)/n}} \sim N(0,1)$$

Нормал хольцын загварууд

Тодорхойлолт. Хэрэв дараах нөхцөл биелэж байвал X санамсаргүй векторыг (олон хэмжээст) нормал дисперс хольцын тархалттай гэж нэрлэнэ:

$X =^d \mu + \sqrt{W}AZ$ (2.2)Энд

- $Z \sim N_k(0, I_k)$
- $W \geq 0$ нь Z-ээс үл хамаарах скаляр утгатай санамсаргүй хэмжигдэхүүн
- $A \in \mathbb{R}^{d\times k}$, $\mu \in \mathbb{R}^d$ нь тогтмолуудын матриц болон вектор.

W санамсаргүй хэмжигдэхүүний нөхцөлд $X \mid W \sim N_d(\mu, w\Sigma)$, энд $\Sigma = AA^T$ тул уг тархалтыг нормал дисперс хольцын загвар гэж нэрлэдэг.

Нормал дисперс хольцын загварын характристик функц нормал тархалтын характристик функц, бүтэн нөхцөлт математик дунджийг ашиглавал дараах хэлбэртэйгээр олдоно.

$$\phi_{X(t)} = E\left(E(\exp(it^T X) \mid W)\right) = E(\exp(it^T\mu - {}^1\!/_2 W t^T \Sigma t))$$

$= \exp(it^T\mu)\hat{H}\left(\frac{1}{2}t^T\Sigma t\right)$. энд $\hat{H} = \int_o^\omega e^{-\theta v} dH(v)$ нь W-ийн тархалтын функц H-ийн Лаплас-Стильтесийн хувиргалт. Характристик функц дээр нь үндэслэн бид нормал дисперс хольцын загвартай санамсаргүй хэмжигдэхүүнийг $X \sim M_d(\mu, \Sigma, \hat{H})$ гэж тэмдгэлнэ.

Тухайлбал, W-ээр $W \sim Ig\left(\frac{1}{2}v, \frac{1}{2}v\right)$ урвуу гамма тархалттай (энэ нь $\frac{v}{W} \sim \chi_v^2$ -тэй эквивалент) санамсаргүй хэмжигдэхүүнийг сонгон авбал X нь v чөлөөний зэрэгтэй олон хэмжээст t тархалттай байна. Нормал дисперс хольцын өргөн бүл W-г өргөтгөсөн урвуу Гауссын (GIG) тархалттай $W \sim N^-(\lambda, \chi, \psi)$ санамсаргүй хэмжигдэхүүнээр сонгон авсан үед гардаг.

Бидний өмнө авч үзсэн олон хэмжээст тархалтууд нь эллипслэг тэгш хэмтэй ба энэ нь бодит эрсдэлийн хүчин зүйлсийн хувьд хялбаршуулсан таамаглал юм.

Эллипслэг тэгш хэмтэй тархалтын хувьд түүний нэг хэмжээст тархалтууд дунджийнхаа хувьд тэгш хэмтэй байдаг. Энэ нь хувьцааны өгөөжийн хувьд илэрдэг сөрөг өгөөж (алдагдал) нь эерэг өгөөжөөс (ашиг) илүү өргөн сүүлтэй байдаг практик үр дүнтэй зөрчилдөнө. Одоо авч үзэх загвар нь нормал хольцын загварт тодорхой хэмжээний тэгш бусыг нэмсэн загвар байх болно.

Тодорхойлолт. Хэрэв дараах нөхцөл биелэж байвал X санамсаргүй векторыг (олон хэмжээст) нормал дундаж-дисперс хольцын тархалттай гэж нэрлэнэ:

$X =^d m(W) + \sqrt{W}AZ$ (2.4)Энд

- $Z \sim N_k(0, I_k) W \geq 0$ нь Z-ээс үл хамаарах скаляр утгатай санамсаргүй хэмжигдэхүүн
- $A \in \mathbb{R}^{d \times k}$ тогтмолын матриц
- $m: [0, \infty) \to \mathbb{R}^d$ нь хэмжигдэх функц.

Энэ тохиолдолд

$X \mid W = w \sim N_d(m(w), w\Sigma)$ (2.5)энд $\Sigma = AA^T$.

Энэ нөхцөлт тархалтаас яагаад уг тархалтуудыг нормалын дундаж-дисперс хольц гэж нэрлэсэн харагдаж байна. $m(W)$-ийн хувь дахь боломжит сонголт нь:

$m(W) = \mu + W\gamma$ (2.6)энд $\mu, \gamma \in \mathbb{R}^d$.

Гүйцэд өргөтгөсөн гиперболлиг тархалын бүл нь (2.4) дундаж дисперс хольцын байгуулалт, (2.6) нөхцөлт дунджийг ашиглах үед олдоно. Хольцын тархалтыг өргөтгөсөн урвуу Гауссын тархалт (GIG) $W \sim N^-(\lambda, \chi, \psi)$-ээр сонгон авъя.

Хэрэв $\lambda = \frac{1}{2}(d+1)$ бол өргөтгөсөн гэдэг үгийг орхин d хэмжээст гиперболлиг тархалттай гэж нэрлэнэ. Энэ тархалтын нэг хэмжээст тархалтууд нь ижил $\lambda = \frac{1}{2}(d+1)$ параметртэй боловч нэг хэмжээст гиперболлиг тархалттай биш байдаг.

- Хэрэв $\lambda = 1$ бол нэг хэмжээст тархалтууд нь нэг хэмжээст гиперболлиг тархалттай олон хэмжээст тархалт гарна. Уг нэг хэмжээст гиперболлиг тархалт нь санхүүгийн өгөөжийн нэг хэмжээст шинжилгээнд өргөн ашиглагддаг.
- Хэрэв $\lambda = -\frac{1}{2}$ бол уг тархалтыг NIG тархалт гэж нэрлэдэг. Нэг хэмжээст тохиолдол нь санхүүгийн өгөөжийн шинжилгээнд өргөн ашиглагддаг.
- Хэрэв $\lambda > 0, \chi = 0$ бол өргөтгөсөн гиперболлиг тархалтыг дисперс-гамма тархалт гэж нэрлэнэ.
- Хэрэв $\lambda = -\frac{1}{2}\nu, \chi = \nu, \psi = 0$ бол өргөтгөсөн гиперболлиг тархалтыг тэгш хэмжтэй бус эсвэл гажилттай t тархалт гэж нэрлэнэ.

Бөмбөлөг болон эллипслэг тархалт

Бөмбөлөг тархалтын бүл нь компонентууд нь корроляц хамааралгүй, нэгэн ижил, тэгш хэмтэй тухайн тархалтуудтай санамсаргүй векторуудын хувь дахь тархалтуудыг өөртөө багтаадаг. Энэ бүл дотор $N_d(0, I_d)$ нь компонентууд нь хамтдаа үл хамаарах байдаг цорын ганц загвар юм. Эллипслэг тархалтын маш олон чанарууд бөмбөлөг тархалтын чанаруудыг ойлгосон тохиолдолд хялбар ойлгогддог.

Тодорхойлолт. Хэрэв дурын ортогнал хувиргалт $U \in \mathbb{R}^{d\times d}$ (ө/х $U^T U = UU^T = I_d$ нөхцлийг хангасан хувиргалт) бүрийн хувьд дараах нөхцлийг хангадаг бол $X = (X_1, \ldots, X_d)^T$ санамсаргүй векторыг бөмбөлөг тархалттай гэж нэрлэнэ:

$UX =^d X$.Иймээс бөмбөлөг санамсаргүй вектор нь эргүүлэлтээр тархалтын хувьд инвариант байна. Бөмбөлөг тархалтыг тодорхойлох өөр хэд хэдэн аргууд байдаг. Тухайлбал доорх теоремд бөмбөлөг тархалтыг тодорхойлох өөр аргуудыг авч үзэв:

Теорем. X нь бөмбөлөг тархалттай байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь уг санамсаргүй вектор дараах стохастик тавилтай байх явдал юм:

$X =^d RS$энд S нь $S^{d-1} = \{s \in \mathbb{R}^d:\ s^T s = 1\}$ нэгж бөмбөлөг дээр жигд тархсан ба $R \geq 0$ нь S-ээс үл хамаарах цацраг санамсаргүй хэмжигдэхүүн.

Тэг цэг дээр масстай тархалтуудтай санамсаргүй хэмжигдэхүүнүүд харьцааны хувиард орсон тохиолдолд утгагүй болдог учраас иймтархалтуудыг бөмбөлөг тархалтын ангиас хасч үзэх шаардлагатай болдог. Энэ үндэслэлээр $P(X = 0) = 0$ нөхцлийг хангах $S_d^+(\psi)$ дэд ангид ордог X санамсаргүй хэмжигдэхүүнүүдийг авч үзнэ.

Тодорхойлолт. Хэрэв $X =^d \mu + AY$ нөхцөл биелдэг бол X-ийг эллипслэг тархалттай гэж нэрлэнэ. Энд $Y \sim S_k(\psi)$ ба $A \in \mathbb{R}^{d\times k}, \mu \in \mathbb{R}^d$ –үүд нь тогтмолын матриц болон векторууд.

Эллипслэг тархалттай санамсаргүй векторын характристик функц:

$$\phi_{X(t)} = E\left(e^{it^T X}\right) = E\left(e^{it^T(\mu+AY)}\right) = e^{it^T\mu} E\left(e^{i\left(A^T t\right)^T Y}\right) = e^{it^T\mu}\psi(t^T \Sigma\, t)$$

энд $\Sigma = AA^T$. Характристик функцийн уг тавилд нь үндэслэн бид цаашид $X \sim E_d(\mu, \Sigma, \psi)$ тэмдэглэгээг ашиглах болно. Энд μ нь X санамсаргүй векторын байрлалын параметр, Σ нь дисперсийн матриц, ψ нь характристик үүсгүүр.

Өгүүлбэр. $X \sim E_d(\mu, \Sigma, \psi)$ байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь дараах нөхцлийг хангах S, R, A олдох явдал юм:

$X =^d \mu + RAS$энд

- S нь $\mathcal{S}^{d-1} = \{s \in \mathbb{R}^d:\ s^T s = 1\}$ нэгж бөмбөлөг дээр жигд тархсан санамсаргүй вектор,
- $R \geq 0$ нь S-ээс үл хамаарах цацраг санамсаргүй хэмжигдэхүүн,
- $A \in \mathbb{R}^{d \times k}$ нь $AA^T = \Sigma$ байх тогтмолын матриц.

Эллипслэг болон бөмбөлөг тархалттай санамсаргүй векторуудын хооронд дараах хамаарал оршин байна.

$X \sim E_d(\mu, \Sigma, \psi) \Leftrightarrow \Sigma^{-\frac{1}{2}}(X - \mu) \sim S_d(\psi)$ (2.7) Энэ тохиолдолд хэрэв бөмбөлөг вектор g нягтын үүсгүүртэй бол $X = \mu + \Sigma^{1/2} Y$ нь дараах нягттай байна:

$$f(x) = \frac{1}{|\Sigma|^{1/2}} g\big((x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu)\big).$$

QQ-диаграмм. Бидний дараагийн авч үзэх арга нь үл бөхөх эллипслэг болон бөмбөлөг тархалтын хоорондох (4.1) хамаарал дээр үндэслэнэ. Хэрэв μ, Σ мэдэгддэг бол эллипслэг тэгш хэмийг шалгах нь $\left\{\Sigma^{-\frac{1}{2}}(X_i - \mu):\ i = 1, \ldots, n\right\}$ өгөгдөл бөмбөлөг тархалттай эсэхийг шалгах болж хувирна. Эдгээр параметрүүдийг харгалзах үнэлэлтээр нь орлуулбал бөмбөлөг тархалттай эсэхийг шалгах өгөгдөл

$\left\{Y_i = \hat{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}(X_i - \hat{\mu}):\ i = 1, \ldots, n\right\}$ (2.8)болно.

Лемм. $T(Y)$ нь дурын $a > 0$ хувьд дараах нөхцлийг бараг хаа ч хангадаг статистик байг:

$T(aY) = T(Y).$ (2.9)Тэгвэл $\forall Y \in S_d^+(\psi)$ хувьд $T(Y)$ нь нэгэн ижил тархалттай байна. Иймд $Y \sim N_d(0, I_d)$ үед тархалтыг сайн мэдэх (2.9)-ийг хангасан статистикийг хайх шаардлагатай. Доорх хоёр статистик нь энэхүү чанарыг хангана:

$$T_1(Y) = \frac{d^{1/2}\bar{Y}}{\sqrt{\frac{1}{d-1}\sum_{i=1}^d (Y_i - \bar{Y})^2}}, \qquad \bar{Y} = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^d Y_i \qquad (2.10)$$

$$T_2(Y) = \frac{\sum_{i=1}^k Y_i^2}{\sum_{i=1}^d Y_i^2}. \qquad (2.11)$$

$Y \sim N_d(0, I_d)$ үед $Y \sim S_d^+(\psi)$ нөхцлийг хангах тул $T_1(Y) \sim t_{d-1}, T_2(Y) \sim Beta\left(\frac{1}{2}k, \frac{1}{2}(d-k)\right)$. T_2 статистик нь QQ-диаграммыг илүү сайн илрүүлдэг ба k-ийн утгыг $(d-k)$-тай ойролцоогоор сонгохыг санал болгосон байдаг.

Экстремал утгын онол

Өргөтгөсөн экстремал утгын тархалт

Сонгодог EVT онол нь үл хамаарах нэгэн ижил тархалттай санамсаргүй хэмжигдэхүүний нормчилсон максимум $M_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ -ийн хязгаарын тархалттай холбогддог. Нормчилсон блок максимумын боломжит үл бөхөх хязгаарын тархалт нь GEV бүлд ордог.

Тодорхойлолт (Өргөтгөсөн экстремал утгын (GEV) тархалт) Стандарт GEV тархалтын тархалтын функц гэж дараах функцийг хэлнэ:

$$H_\xi(x) = \begin{cases} \exp(-(1+\xi x)^{-\frac{1}{\xi}}), & \xi \neq 0, \\ \exp(-e^{-x}) \quad , & \xi = 0. \end{cases}$$

энд $1 + \xi x > 0$. Гурван параметртэй бүл нь байрлалын параметр $\mu \in R$ болон масштабын параметр $\sigma > 0$ хувьд $H_{\xi,\mu,\sigma}(x) := H_\xi((x-\mu)/\sigma)$ гэж тодорхойлогдоно.

ξ параметрийг GEV тархалтын хэлбэрийн параметр гэдэг ба H_ξ нь тархалтын төрлийг тодорхойлно. GEV тархалтыг $\xi > 0$ үед Фрешэгийн тархалт, $\xi = 0$ үед Гумбелтийн тархалт, $\xi < 0$ үед Вейбуллын тархалт гэж тус тус нэрлэнэ. Үл хамаарах нэгэн ижил тархалттай санамсаргүй хэмжигдэхүүний блок макисимум M_n тохирох нормчлолыг сонгосоны дараа тархалтаараа нийлдэг гэж үзье. $P(M_n \leq x) = F^n(x)$ тул уг нийлэлт нь үл бөхөх $H(x)$ функцийн хувьд

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{M_n - d_n}{c_n} \leq x\right) = \lim_{n\to\infty} F^n(c_n x + d_n) = H(x) \qquad (3.1)$$

байх $(d_n), (c_n)$, $\forall n$ хувьд $c_n > 0$ дараалал оршин байхыг илэрхийлнэ. Максимумын судалгаандах GEV тархалтын гол үүргийг дараах тодорхойлолт, теоремд томъёолов:

Тодорхойлолт (максималаар нийлэх муж) Хэрэв (3.1) ямар нэг үл бөхөх H тархалтын функцийн хувьд биелдэг бол F-ийг H-ийн максималаар нийлэх мужид орж байна гэж ярих ба $F \in MDA(H)$ гэж тэмдэглэнэ.

Теорем (Фишер-Типпетт, Гнеденко) Хэрэв ямар нэг үл бөхөх H функцийн хувьд $F \in MDA(H)$ бол H нь H_ξ төрлийн тархалт (өөрөөр хэлбэл GEV тархалт) байна.

Өргөтгөсөн Паретогийн тархалт

Босгоос давсан утгуудын хэтрэлтийг загварчлах гол тархалтын загвар нь өргөтгөсөн Паретогийн тархалт (GPD) юм.

Тодорхойлолт (GPD) GPD-ийн тархалтын функц гэж дараах функцыг хэлнэ

$$G_{\xi,\beta}(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi x}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}, & \xi \neq 0, \\ 1 - \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right), & \xi = 0. \end{cases}$$

энд $\beta > 0$ ба $\xi \geq 0$ үед $x \geq 0$, $\xi < 0$ үед $0 \leq x \leq -\beta/\xi$. ξ болон β параметрүүдийг харгалзан байрлалын болон масштабын параметр гэж нэрлэнэ.

Максимал нийлэх мужын тодорхойлолтыг ашиглавал $\forall \xi \in R$: $G_{\xi,\beta} \in MDA(H_\xi)$ байдаг. Өргөн сүүлтэй тохиолдолд буюу $\xi > 0$ үед $k \geq 1/\xi$ үед $E(X^k) = \infty$ байдаг ба $\xi < 1$ нөхцөлд GPD-ийн дундаж оршин байна:

$$E(X) = \frac{\beta}{1-\xi}$$

EVT дэх GPD-ийн үндсэн үүрэг нь өндөр босгоос давсан хэтрэлтийн тархалтыг загварчлахад оршдог. Энэ ойлголттой адил EVT-д чухал үүрэг гүйцэтгэдэг дундаж хэтрэлтийн функцийг мөн тодорхойлох шаардлагатай.

Тодорхойлолт (u босгоос давсан хэтрэлтийн тархалт) X нь F тархалтын функцтэй санамсаргүй хэмжигдэхүүн байг. u босгоос давсан хэтрэлтийн тархалт гэж $0 \leq x < x_F - u$ хувьд тодорхойлогдсон дараах функцийг хэлнэ:

$$F_u(x) = P(X - u \leq x | X > u) = \frac{F(x+u) - F(u)}{1 - F(u)}$$

Энд $x_F \leq \infty$ нь F-ийн баруун төгсгөлийн цэг.

Тодорхойлолт (дундаж хэтрэлтийн функц) Төгсгөлөг дундажтай X санамсаргүй хэмжигдэхүүний дундаж хэтрэлтийн функц гэж дараах функцийг хэлнэ:

$$e(u) = E(X - u | X > u)$$

GPD-ийн дундаж хэтрэлтийн функц дараах хэлбэртэйгээр олддог:

$$e(u) = \frac{\beta(u)}{1-\xi} = \frac{\beta + \xi u}{1-\xi}$$

энд хэрэв $0 \leq \xi < 1$ бол $0 \leq u < \infty$ ба хэрэв $\xi < 0$ бол $0 \leq u \leq -\beta/\xi$. Энэ томъёоноос харахад дундаж хэтрэлтийн функц нь босго u-аараа шугаман байна. Энэ нь GPD-ийн чанарыг тодорхойлоход ашиглагдана.

$x \geq u$ хувьд бага зэргийн тооцоолол хийхэд $\bar{F}(x) = \bar{F}(u)\bar{F}_u(x-u)$ байдаг.

Теорем (Pickands-Balkema-de Haan)

$$\lim_{u\to x_F} \sup_{0\le x<x_F-u} |F_u(x) - G_{\xi,\beta(u)}| = 0$$

Нөхцлийг хангах эерэг $\beta(u)$ функц олдох зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $F \in MDA(H_\xi)$, $\xi \in R$.

Эх олонлогийн дундаж хэтрэлтийн функцийн түүврийн үнэлэлтийг түүврийн дундаж хэтрэлтийн функц гэдэг ба дараах хэлбэртэйгээр илэрхийлэгдэнэ:

$$e_n(u) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - u)I_{\{X_i>u\}}}{\sum_{i=1}^{n} I_{\{X_i>u\}}}$$

X-ийн тархалт F-ийн сүүлийг болон холбогдох эрсдэлийн хэмжээсийг үнэлэхэд GPD загвар хэрхэн ашиглагддаг талаар одоо авч үзье. $x \ge u$ хувьд бага зэргийн тооцоолол хийхэд

$$\bar{F}(x) = \bar{F}(u)\bar{F}_u(x-u)$$

байдаг. $F(u)$-г түүврийн тархалтын функцээр, $F_u(x-u)$-ийг Пикандс - Балкема - де Хааны теоремын дагуу $G_{\hat{\xi},\hat{\beta}}(x-u)$-аар орлуулбал

$$\hat{\bar{F}}(x) = \frac{N_u}{n}\left(1 + \hat{\xi}\frac{x-u}{\hat{\beta}}\right)^{-\frac{1}{\hat{\xi}}}$$

Харгалзах эрсдэлийн хэмжээсүүд нь дараах хэлбэртэйгээр олддог:

$\alpha \ge \ddot{F}(u)$ хувьд VaR нь

$$\widehat{VaR}_\alpha = u + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}}\left(\left(\frac{n}{N_u}(1-\alpha)\right)^{-\hat{\xi}} - 1\right),$$

$\xi < 1$ үед холбогдох хүлээгдэж буй гарз нь

$$\widehat{ES}_\alpha = \frac{\widehat{VaR}_\alpha}{1-\hat{\xi}} + \frac{\hat{\beta} - \hat{\xi}u}{1-\hat{\xi}}.$$

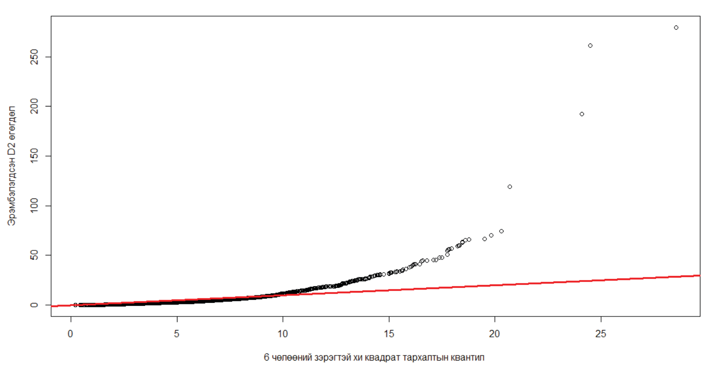
Судалгааны хэсэг

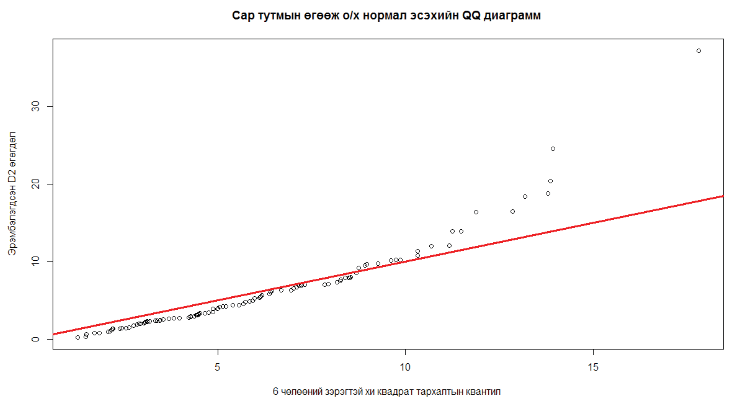
2006/01/01-нээс хойшхи валютын ханшийн өдөр тутмын өгөгдлүүдийг Монголбанкны сайтаас авсан бол 2001/01/01-2005/12/31-ний хоорондох долларын ханшийн өдөр тутмын мэдээллийг Голомт банкны өгөгдлөөс аван бусад валютуудыг Блүүмбергийн кросс ханш ашиглан тооцоолж олсон. Судалгааг Монголбанкны сайт дээрх эхний зургаан валют болох USD, EUR, JPY, GBP, RUB, CNY-ийн хувьд R программ код бичиж хийсэн болно.

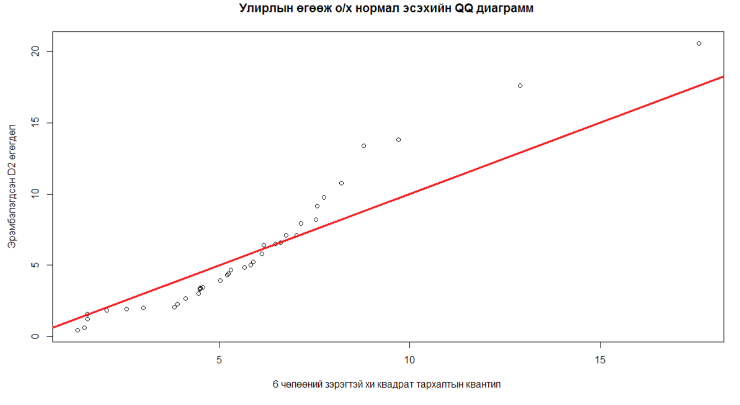
Судалгаанд өдөр тутмын өгөөжийн хувьд 2006/06/27-2016/04/08 хүртэлх валютын ханшийг ашигласан. Учир нь 2006/06/27-оос өмнөх USD-ийн ханш нь 100-ны нарийвчлалтай биш бүхэлчилж авдаг байсан нь маш олон өгөгдлийн өдрийн өгөөж 0 гарахад хүргэсэн. Энэ нь долларын ханш 0 цэг дээр масстай болоход нөлөөлсөн. Улмаар энэ нөлөө нь валютын ханшуудын өдөр тутмын өгөөжийн хамтын тархалт эллипслэг тархалттай байхад сөргөөр нөлөөлсөн тул уг өдрөөс өмнөх өгөгдлүүдийг хассан болно.

Сарын болон улирлын өгөөжийг тооцохдоо сар бүрийн болон улирал бүрийн эцсийн өдрийн валютын ханшийг авсан. Сар доторх валютын ханшийг авч сарын болон улирлын өгөөжийг тооцож болох боловч (Тухайлбал, 2012/06/15-ны валютын ханш, 2012/05/15-ны ханш, 2012/03/15-ны ханш) энэ нь өгөөжийн (эрсдэлийн хүчин зүйлийн өөрчлөлтүүдийн) цуваа үл хамаарах гэсэн таамаглалыг зөрчих учраас сарын болон улиралын сүүлийн өдрийн ханшуудыг авсан болно.

Ханшийн өөрчлөлт маш бага үед энгийн болон логарифм өгөөжүүд хоорондоо бараг тэнцүү байдаг. Энэ чанар нь натурал логарифм функцын хувь дахь $x \approx 0$ үед $\ln(1+x) \approx x$ чанараас шууд гардаг. Хэдий тийм боловч сарын болон улирлын өгөөжийн хувьд энгийн болон логарифм өгөөжийн мэдэгдэхүйц ялгаа гарна. Логарифм өгөөжийн хувьд k өдрийн өгөөж нь k дараалсан өдрийн өгөөжийн нийлбэрээр илэрхийлэгддэг $(R_t[k] = R_{t+1} + \cdots + R_{t+k})$, зарим санхүүгийн загваруудад эрсдэлийн хүчин зүйлийг логнормал тархалттай гэж (тухайлбал, геометр Броуны хөдөлгөөн) үздэг шалтгаанаар өгөөжийг тооцохдоо энгийн өгөөжөөс илүүтэйгээр логарифм өгөөжийг судалгаанд ашигласан.







Сонгосон валютуудын өгөөжүүдийн хамтын тархалтыг олон хэмжээст нормал тархалттай гэсэн таамаглалыг олон хэмжээст эксцессийн коэффицент (k_d) статистик дээр үндэслэсэн Мардиагийн тестээр шалгахад Мардиагийн статистик өдөр тутмын өгөөжийн хувьд 320.5 (ρ-утга=0), сарын өгөөжийн хувьд 9.3 (ρ-утга=0), улирлын өгөөжийн хувьд 2.1 (ρ-утга=0.037) гарсан. (2.1) ёсоор k_d дээр үндэслэсэн Мардиагийн статистик нь стандарт нормал тархалттай тул шинжүүрийн утга нь 1.96. Энэхүү шинжүүрийн утгуудтай өдөр тутмын, сарын, улирлын өгөөжүүдийн хувьд гарсан Мардиагийн статистикийн утгыг харьцуулбал валютуудын өдөр тутмын, сарын, улирлын өгөөжийн хамтын тархалт олон хэмжээст нормал тархалттай гэсэн таамаглал няцаагдаж байна. $D_1^2, \dots, D_n^2$-ууд нь хэрэв өгөөж хамтын нормал тархалттай бол ойролцоогоор χ_d^2 тархалттай байх ёстой тул бид QQ-диаграмм ашиглан нүдэн баримжаагаар олон хэмжээст нормал тархалттай эсэхийг тодорхойлж чадна. Доорх зургаас харахад өдөр тутмын, сарын, улирлын өгөөжүүдийн хувьд QQ-диаграмм шулуунаас мэдэгдэхүйц ялгаатай тул хамтын нормал тархалттай биш байна.

USD, EUR, JPY, GBP, RUB, CNY-ийн өдөр тутмын, сарын, улирлын өгөөжүүдийн хамтын болон нэг хэмжээст тархалтууд ямар өргөтгөсөн гиперболлиг тархалттай болохыг судалсан үр дүнгүүдийг доорх хүснэгтэд үзүүлэв. Тухайн валютад харгалзах өгөөжийг авч үзэж буй тархалтуудаар үнэлэн харгалзах үнэний хувь бүхий логарифм функцын сөрөг утгуудыг эдгээр хүснэгтүүдэд оруулсан. Тухайлбал, өдөр тутмын өгөөжийн хувьд NIGs-д харгалзах мөр болон GBP-д харгалзах баганы огтлолцлын элемент 8113.8 нь GBP-ийн өгөөжийг NIGs тархалтаар үнэлэхэд гарах үнэний хувь бүхий логарифм функцын утгыг сөрөг тэмдэгтэйгээр авсныг илэрхийлнэ. NIGs, HYPs-ээр NIG, HYP тархалтын $H_0\colon \gamma = 0$ зааглалтын үеийн буюу тэгш хэмт NIG, HYP-ийг тэмдгэлсэн. Өдөр тутмын өгөөжийн хувьд өгөөжүүдийн хамтын тархалтыг t, HYPs тархалттай гэж үзэж болохоор байна. Харин өдөр тутмын USD, EUR, JPY, GBP, RUB, CNY-ийн өгөөжийн хувьд NIGs, HYP тархалттай гэж үзэж болохоор байна.

	Multvar	USD	EUR	JPY	GBP	RUB	CNY
Gauss	54 846.9	10 130.1	8 004.9	7 959.6	8 095.3	7 113.3	9 920.0
t	71 556.9	9 588.4	8 048.2	7 977.8	8 007.1	6 388.4	9 487.4
NIGs	56 864.0	10 843.2	8 113.8	8 100.9	8 249.3	7 590.9	10 380.2
HYPs	71 641.9	9 587.9	8 048.7	7 978.0	8 007.1	6 386.4	9 487.0
NIG	56 831.2	10 840.1	8 105.9	8 097.9	8 250.0	7 584.0	10 372.9
HYP	56 855.9	10 853.8	8 110.5	8 100.1	8 249.7	7 589.2	10 379.0

Харин сарын өгөөжийн хувьд өгөөжүүдийн хамтын тархалтыг NIGs, HYPs тархалттай гэж үзэж болохоор байна. Сарын USD-ийн өгөөж NIGs тархалттай, EUR-ийн өгөөж NIG тархалттай, JPY-ийн өгөөж NIGs тархалттай, GBP-ийн өгөөж HYPs тархалттай, RUB-ийн өгөөж NIGs тархалттай, CNY-ийн өгөөжийн хувьд HYP тархалттай гэж тус тус үзэж болохоор байна.

	Multvar	USD	EUR	JPY	GBP	RUB	CNY
Gauss	1 545.2	247.6	198.5	196.31	209.43	168.45	244.76
t	1 569.1	257.4	200.2	196.89	210.06	174.63	253.82
NIGs	1 576.4	262.8	201.74	197.11	210.04	175.27	252.68
HYPs	1 576.2	257.6	200.3	197.07	210.28	175.86	253.89

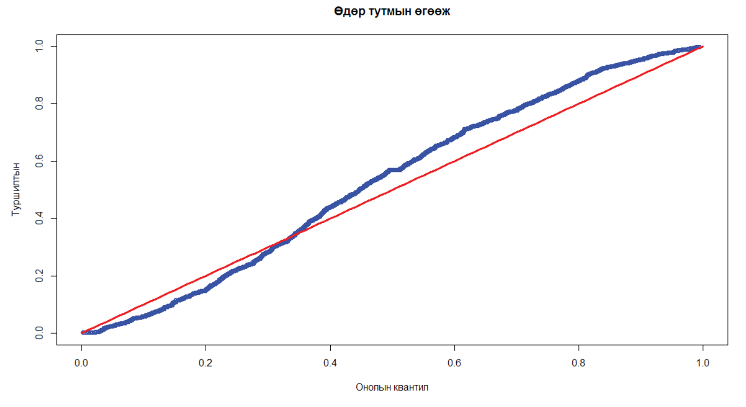
NIG	1 569.3	261.0	201.8	196.87	210.10	174.05	253.18
HYP	1 569.4	261.8	201.7	197.01	210.24	174.70	254.21

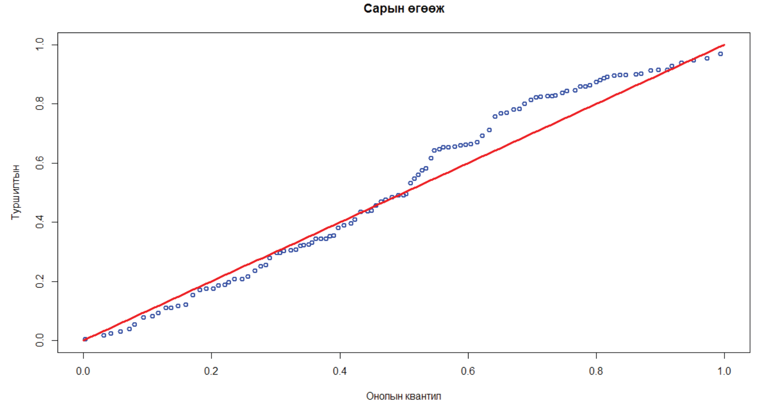
Улирлын өгөөжийн хувьд өгөөжүүдийн хамтын тархалтыг NIGs, HYPs гэж үзэх нь бусад төрлийн тархалтуудаас давуу байна. Нэг хэмжээст тархалтын хувьд EUR-ийн өгөөжийн холбогдох тархалтуудын парамерийг үнэлэх боломжгүй байсан тул орхисон. Улирлын өгөөжийн хувьд USD-ийн өгөөжийг NIGs, JPY-ийн өгөөжийг NIGs, GBP-ийн өгөөжийг HYPs, RUB-ийн өгөөжийг NIGs, CNY-ийн өгөөжийг NIGs тархалттай гэж үзэж болохоор байна.

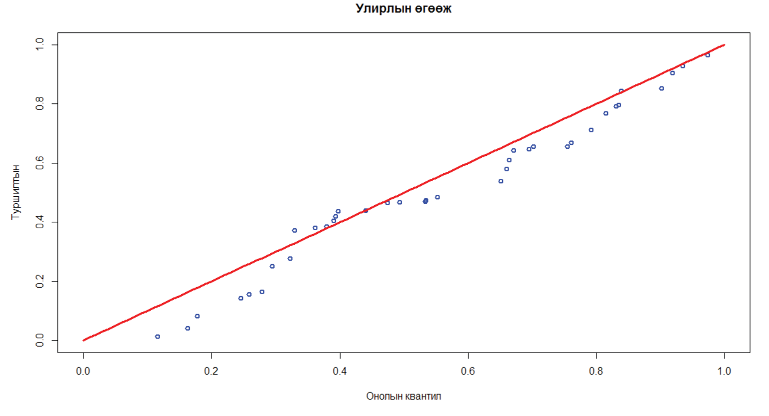
	Multvar	USD	JPY	GBP	RUB	CNY
Gauss	715.7	111.55	77.08	92.50	78.91	111.46
t	748.0	126.72	77.65	95.00	75.91	111.78
NIGs	757.0	132.09	79.58	95.58	92.00	128.10
HYPs	755.9	111.63	79.58	95.86	75.63	112.74
NIG	749.0	130.40	77.77	95.12	90.67	126.36
HYP	749.3	131.32	77.67	95.15	91.28	127.38

Дээрх валютын өгөөжийн тархалтуудаас харахад t, тэгш хэмт NIGs, HYPs-үүд нь олон хэмжээст нормал тархалтаас хамаагүй сайн валютын өгөөжид тохирч байна. Эдгээр тархалтуудын тэгш хэмт бус хэлбэр болох NIG, HYP загварууд нь тэгш хэмт хувилбараасаа зарим тохиолдолд илүү сөрөг үнэний хувь бүхий логарифм функцийн утгатай боловч хэт давамгай байж чадахгүй байна. t, тэгш хэмт NIGs, HYPs тархалтууд нь үнэндээ эллипслэг тархалтын бүлд багтдаг. Иймээс валютын ханшийн өгөөжийн хамтын тархалт ойролцоогоор эллипслэг тархалттай эсэхийг цаашид судлах шаардлагатай юм.

Li, Fang, Zhu нарын аргыг ашиглан өгөөжийн хамтын тархалт эллипслэг эсэхийг QQ-диаграммаар шинжилье. Үүний тулд бид (2.11)-ийн T_2 статистикийг ашиглъя. Доорх зургуудаас харахад өдөр тутмын, сарын, улирлын өгөөжүүдийн хамтын тархалтыг эллипслэг гэж үзэх үндэслэлтэй байна.


Өдөр тутмын өгөөж
Туршилтын
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
Онолын квантил


Сарын өгөөж
Туршилтын
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
Онолын квантил


Улирлын өгөөж
Туршилтын
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
Онолын квантил

Экстремал утгын онолын шинжилгээ хийхэд 2001/01/01-2016/04/08 хоорондох валютын ханшийн мэдээллийг ашигласан. Доорх хүснэгтээс харахад USD-ийн өдөр тутмын өгөөжийн 5 жилийн эргэн давтагдах түвшин нь 1.21% гарсан нь аливаа 5 жилийн хугацаанд нэг жилд нь энэ босгыг USD-ийн өдөр тутмын өгөөж давж чангарахыг илэрхийлнэ. 5 жилийн эргэн давтагдах түвшин USD-ийн чангаралтын хувьд 0.66%-4.23%-ийн хооронд 95%-ийн магадлалтайгаар оршихоор байна. Хүснэгтээс харахад хамгийн өндөр эргэн давтагдах түвшинтэй валют нь оросын рубль байна. 10 болон 50 жилийн эргэн давтагдах түвшиний хувьд ижил тайлбар хийж болно. Үүнтэй ижлээр сарын, улирлын өгөөжийн 5, 10, 50 жилийн эргэн давтагдах түвшний хувьд тайлбар хийж болно.

Эргэн давт хугацаа	USD			EUR			JPY		
	Доод хил	Цэгэн үнэлэлт	Дээд хил	Доод хил	Цэгэн үнэлэлт	Дээд хил	Доод хил	Цэгэн үнэлэлт	Дээд хил
5	0.66%	1.21%	4.23%	2.19%	2.58%	3.49%	2.48%	2.92%	3.99%
10	1.16%	2.32%	6.97%	2.51%	3.05%	4.97%	2.84%	3.42%	5.21%
50	2.20%	4.41%	6.61%	2.79%	3.57%	7.38%	3.15%	3.94%	8.89%

Эргэн давт хугацаа	GBP			RUB			CNY		
	Доод хил	Цэгэн үнэлэлт	Дээд хил	Доод хил	Цэгэн үнэлэлт	Дээд хил	Доод хил	Цэгэн үнэлэлт	Дээд хил
5	1.91%	2.32%	3.58%	1.83%	3.52%	15.84%	1.00%	1.43%	2.67%
10	2.22%	2.90%	6.27%	3.64%	7.29%	23.69%	1.32%	1.90%	5.22%
50	2.55%	3.66%	10.07%	7.53%	15.05%	30.10%	1.63%	2.41%	7.24%

Одоо босгоос давсан оргил утгуудын (POT) аргаар валютын ханшийн өгөөжүүдэд шинжилгээ хийе. Үзүүлэнгийн зорилгоор USD-ийн өдөр тутмын өгөөжийг авч үзсэн. Бусад валютын хувьд ижилхэн шинжилгээг хийж болно. Доорх хүснэгтүүдэд өдөр тутмын, сарын, улирлын өгөөжийн VaR, ES-тэй холбоотой шинжилгээг хийсэн. Тухайлбал, Эхний хүснэгтээс харахад USD-ийн ханш төгрөгийн эсрэг $VaR_{0.99} = 0.74\%$-ийн түвшинг нэг өдрийн дотор давж чангарах магадлал 1%-тай байна. Өөрөөр хэлбэл 100 өдрийн хувьд валютын ханш ойролцоогоор 1 өдөрт нь 99%-ийн VaR 0.75%-ийн түвшинг давж чангарахыг илэрхийлнэ. Хэрэв доллар $VaR_{0.99} = 0.75\%$ –ийг давж чангарсан бол дунджаар $ES_{0.95} = 1.15\%$ –ийн чангаралт үзүүлэхээр байна. VaR болон ES-ийн цэгэн үнэлэлтүүд нь тодорхой биш тул харгалзах 95%-

ийн итгэх завсруудыг нь байгуулах шаардлагатай. Тухайлбал, 95%-ийн магадлалтайгаар $VaR_{0.99}$ –ийн утга (0.69%, 0.82%)-ийн завсарт, $ES_{0.99}$ –ийн утга (1.00%, 1.47%)-ийн завсарт тус тус унахаар байна. 99.9%-ийн $VaR_{0.999} = 1.70\%$ нь нэг өдрийн хугацаанд USD-ийн ханш төгрөгийн эсрэг $VaR_{0.999} = 1.70\%$-ийн түвшинг давж чангарах магадлал 0.1%-тай болохыг илэрхийлнэ. Өөрөөр хэлбэл 1000 өдрийн хувьд валютын ханш ойролцоогоор 1 өдөрт нь 99.9%-ийн VaR 1.70%-ийн түвшинг давж чангарахыг илэрхийлнэ. 95%-ийн итгэх завсар нь $VaR_{0.999}$-ийн утга 95%-ийн магадлалтайгаар (1.38%, 2.33%) завсарт оршихыг илэрхийлнэ. Хэрэв USD-ийн ханш нэг өдрийн дотор $VaR_{0.999} = 1.70\%$ түвшинг давж чангарсан тохиолдолд дунджаар $ES_{0.999} = 2.38\%$-ийн чангаралтыг үзүүлэхээр байна.

Хүснэгтээс харахад USD-ийн ханш төгрөгийн эсрэг $VaR_{0.99} = 6.87\%$ -ийн түвшинг нэг сарын хугацаанд давж чангарах магадлал 1%-тай байна. Өөрөөр хэлбэл 100 сарын хугацаанд валютын ханш ойролцоогоор 1 сард нь 99%-ийн VaR 6.87%-ийн түвшинг давж чангарахыг илэрхийлнэ. Хэрэв доллар $VaR_{0.99} = 6.87\%$-ийг давж чангарсан бол дунджаар $ES_{0.99} = 10.31\%$ -ийн чангаралт үзүүлэхээр байна. 99%-ийн магадлалтайгаар $VaR_{0.99}$-ийн утга (4.92%, 14.56%)-ийн завсарт, $ES_{0.99}$-ийн утга (10.19%, 53.22%)-ийн завсарт тус тус унахаар байна. $VaR_{0.999}$-ийг харахад доллар нэг сарын хугацаанд 14.91%-ийг давж чангарах магадлал 1% байна. Энэ нь уг түвшинг 1000 сард дунджаар 1 удаа давахыг илэрхийлнэ. Хэдийгээр сарын өгөөжийн VaR-ийн цэгэн үнэлэлт нь 14.91% гэж гарч байгаа боловч 99.9%-ийн VaR 95%-ийн магадлалтайгаар 10.51%-77.53%-ийн хооронд байхаар байна. Хэрэв уг түвшинг давсан бол дунджаар 20.73%-ийн чангаралт үзүүлэхээр байна. $ES_{0.999}$-ийн утга 12.12%-316.98%-ийн хооронд 95%-ийн магадлалтайгаар унахаар байна. USD-ийн улирлын өгөөжийн хувьд өдөр тутмын болон сарын өгөөжтэй ижил тайлбар хийж болно. Энд нэг зүйл цохон тэмдэглэхэд USD улирлын хугацаанд 2-оос дээш дахин MNT-ийн эсрэг чангарах боломжтой байна. Төстэй байдлаар EUR, JPY, GBP, RUB, CNY-ийн өдөр тутмын, сарын, улирлын өгөөжийн хувьд тайлбар хийж болно.

Магадлал	VaR(USD)			ES(USD)		
	Доод хил	Цэгэн үнэлэлт	Дээд хил	Доод хил	Цэгэн үнэлэлт	Дээд хил
99%	0.69%	0.74%	0.82%	1.00%	1.15%	1.47%
99.9%	1.38%	1.70%	2.33%	1.77%	2.38%	4.04%

99% 99.9%	4.92% 10.51%	6.87% 14.91%	14.56% 77.53%	10.19% 12.12%	10.31% 20.73%	53.22% 316.98%
99% 99.9%	16.58% 22.78%	19.13% 60.44%	136.51% 18+	19.21% 25.02%	37.74% 113.18%	18+ 18+

Магадлал	VaR(EUR)			ES(EUR)		
	Доод хил	Цэгэн үнэлэлт	Дээд хил	Доод хил	Цэгэн үнэлэлт	Дээд хил
99% 99.9%	1.64% 2.59%	1.73% 2.91%	1.85% 3.54%	2.06% 3.00%	2.24% 3.58%	2.55% 4.91%
99% 99.9%	7.68% 18.28%	9.52% 18.05%	17.64% 127.42%	17.15% 19.56%	13.17% 24.14%	353.18% 16+
99% 99.9%	14.43% 23.53%	15.36% 22.08%	44.46% 319.39%	20.45% 23.53%	18.28% 24.98%	418.47% 16+

Магадлал	VaR(JPY)			ES(JPY)		
	Доод хил	Цэгэн үнэлэлт	Дээд хил	Доод хил	Цэгэн үнэлэлт	Дээд хил
99% 99.9%	1.77% 2.84%	1.88% 3.18%	2.01% 3.92%	2.26% 3.24%	2.44% 3.79%	2.78% 5.42%
99% 99.9%	7.63% 13.53%	9.09% 13.51%	13.61% 42.47%	14.75% 16.91%	11.01% 15.37%	27.96% 102.67%
99% 99.9%	19.79% 31.48%	21.13% 32.87%	63.59% 425.64%	29.35% 33.89%	26.22% 38.17%	410.68% 26+

Магадлал	VaR(GBP)			ES(GBP)		
	Доод хил	Цэгэн үнэлэлт	Дээд хил	Доод хил	Цэгэн үнэлэлт	Дээд хил
99% 99.9%	1.52% 2.51%	1.61% 2.90%	1.69% 3.75%	1.97% 2.98%	2.16% 3.74%	2.58% 5.96%
99% 99.9%	6.56% 9.92%	7.99% 12.74%	12.68% 39.08%	9.81% 13.57%	10.04% 15.03%	24.14% 74.61%
99% 99.9%	13.55% 24.19%	17.15% 29.78%	54.99% 341.25%	22.35% 26.30%	22.57% 36.65%	272.40% 1725.03%

Магадлал	VaR(RUB)			ES(RUB)		
	Доод хил	Цэгэн үнэлэлт	Дээд хил	Доод хил	Цэгэн үнэлэлт	Дээд хил
99% 99.9%	2.18% 4.26%	2.36% 5.04%	2.60% 6.65%	3.08% 5.30%	3.51% 6.80%	4.31% 10.71%
99% 99.9%	7.92% 15.00%	11.06% 26.34%	23.81% 133.87%	16.04% 19.16%	17.63% 39.34%	91.84% 548.56%
99% 99.9%	15.42% 19.18%	14.07% 24.94%	195.49% 14+	17.77% 20.79%	18.73% 31.08%	14+ 14+

Магад-лал	VaR(CNY)			ES(CNY)		
	Доод хил	Цэгэн үнэлэлт	Дээд хил	Доод хил	Цэгэн үнэлэлт	Дээд хил
99% 99.9%	0.75% 1.45%	0.79% 1.75%	0.88% 2.32%	1.04% 1.85%	1.20% 2.45%	1.50% 3.83%
99% 99.9%	5.16% 9.20%	7.22% 16.10%	14.14% 63.26%	10.03% 13.32%	11.03% 23.00%	35.97% 176.98%
99% 99.9%	17.85% 22.84%	19.48% 57.53%	129.00% 18+	20.92% 25.09%	36.40% 102.32%	18+ 18+

Дүгнэлт

USD, EUR, JPY, GBP, RUB, CNY валютуудын өдөр тутмын, сарын, улирлын логарифм өгөөжийн хамтын тархалт тархалт олон хэмжээст нормал тархалттай гэсэн таамаглал 95%-ийн түвшинд няцаагдсан ба QQ диаграммаас мөн нормал биш болох нь гарсан.

Өдөр тутмын өгөөжийн хамтын тархалт тэгш хэмт гиперболлиг тархалттай, сарын өгөөж нь тэгш хэмт сөрөг урвуу Гауссын тархалттай, улирлын өгөөж нь тэгш хэмт гиперболлиг тархалттай гарсан. Валют нэг бүрийн буюу нэг хэмжээст тархалтууд нь өдөр тутмын, сарын, улирлын өгөөжүүдийн хувьд голдуу тэгш хэмт сөрөг урвуу Гауссын тархалттай гарсан.

Нормал дундаж-дисперсийн хольцын загвараар шинжлэхэд хамтын болон нэг хэмжээст тархалтууд нь тэгш хэмт бүтэцтэй байсан тул үнэхээр эллипслэг тархалттай юу гэсэн асуулт урган гарсан ба үүнийг Li, Fang, Zu нарын санал болгосон T_2 статистикийг ашигласан QQ диаграммаар нүдэн баримжаагаар шалгахад өгөөжүүдийн хамтын тархалт эллипслэг тархалттай гэж үзэх үндэстэй байсан. Нэгэнт эллипслэг тархалттай гэж гарсан тул дээрх зургаан валютаар зохиосон багцын VaR нь субаддитив чанарыг хангана. Иймд VaR нь уялдаатай эрсдэлийн хэмжээс болж чадна.

GEV аргаар 5, 10, 50 жилийн эргэн давтагдах түвшинг зургаан валютуудын өгөөжийн хувьд авч үзсэн бөгөөд хамгийн бага эргэн давтагдах түвшинтэй валют нь USD, хамгийн өндөр эргэн давтагдах түвшинтэй валют нь RUB байсан. POT аргаар 99%, 99.9%-ийн VaR, ES-ийг тооцоолсон. Тооцооны үр дүнгээс үзэхэд өдөр тутмын өгөөжийн хувьд хамгийн эрсдэл багатай валют USD, удаах эрсдэл багатай валют нь CNY, хамгийн эрсдэл өндөртэй валют RUB байна. Хэдий тийм боловч сарын болон улирлын өгөөжийн хувьд USD, CNY-ийн эрсдэл бусад валютуудтай харьцуулахад өсдөг болох нь харагдаж байна.

Ашигласан материал

Coles, S. G. *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values*. Springer, 2001

Efron, B. F. and R. J. Tibshirani. *An Introduction to the Bootstrap*. NewYork: Chapman & Hall, 1994.

Jorion, P. Value at Risk: *The New Benchmark for Measuring Financial Risk*, 2nd edn. New York: McGraw-Hill, 2001.

McNeil, A. J. and R. Frey. *Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: an extreme value approach*. Journal of Empirical Finance 7:271–300, 2000.

McNeil, A.; Frey, R.; Embrechts, P. *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques, and Tools*. Princeton University Press, Princeton, 2005.

Г. Баттулга. *Экстремал утгын онолын зарим хэрэглээ*, Санхүүгийн зах зээл дэх эрсдэлийн үнэлгээний зарим аргачлал номны 6 бүлэг. ЭКИМТО, УБ, 2011.