

## КОМПАНИЙН ХУГАРЛЫН ЦЭГ БА АШИГТАЙ АЖИЛЛАХ МУЖИЙН ШИНЖИЛГЭЭ

Р.Энхбат\*, Б.Үнэнбат\*\*, Н.Тунгалаг\*\*\*

**Хураангуй:** Энэхүү өгүүлэлд бид компанийн хугарлын цэг ба ашигт ажиллагааны мужийг тодорхойлох математик загварыг боловсруулсан. Компани “ $\delta$ -ашигтай” байх шинэ ойлголтыг тодорхойлон, компанийг ашигтай байлгах зайлшгүй ба хүрэлцээтэй нөхцлийг томъёолон, бүтээгдэхүүн болон үнийн олонлогуудын мужийг шугаман программчлалын аргаар тогтоож болохыг харуулсан. Шинээр дэвшүүлсэн математик аргачлалыг хэд хэдэн хувилбараар компанийн жишээн дээр хэрэглэн харуулав.

**Түлхүүр үгс:** математик загвар, хугарлын цэг, шугаман программчлал, ашигт ажиллагаа

### MATHEMATICAL MODELLING OF BREAKEVEN POINT AND PROFITABILITY OF FIRMS

**Abstract:** We introduce a new concept called “ $\delta$ -profitability” for companies. In this framework, we formulate the necessary and sufficient conditions for firms to be “ $\delta$ -profitable”. We show that the product and price optimal sets are determined as solutions of linear programming. The proposed methodology has been illustrated on company’s examples.

**Keywords:** mathematical model, break even point, linear programming, “ $\delta$ -profitability”.

---

\* ШУА, Математик Тоон Технологийн Хүрээлэн, (E-mail): renkhat46@yahoo.com

\*\* МУИС, Эрдэнэт сургууль, (E-mail): uugii4411@yahoo.com

\*\*\* МУИС, Бизнесийн сургууль, (E-mail): n.tungalag@num.edu.mn

### Удиртгал

Микро эдийн засгийн онолд пүүсийн эрхэм зорилгыг түүний ашигт ажиллагаа гэж тодорхойлсон байдаг[1] ба компанийн ашгийг максимумчлах бодлогын шийдийн үр дүнд зах зээл дээр бүтээгдэхүүний эрэлт ба нийлүүлэлт бий болдог. Оновчлолын талаас авч үзвэл үйлдвэрлэлийн функц нь хотгор үед зардлын функц нь гүдгэр байх бөгөөд компанийн ашгийн функцийг максимумчлах бодлого нь гүдгэр программчлалын [4] бодлогын ангид багтана. Зардлын функц шугаман үед ашгийг максимумчлах бодлого нь хязгааргүй шийдтэй ба өнөөг хүртэл хэрэглэж ирсэн Лагранжийн сонгодог аргыг хэрэглэх боломжгүй юм[5]. Энэ тохиолдолд бодлогыг төгсгөлөг шийдтэй байлгах үүднээс компанийн бүтээгдэхүүн үйлдвэрлэлийн хүчин чадлыг заавал харгалзан үзэх ёстой.

#### 1. Компанийн хугарлын цэгийн шинжилгээ

Нэг бүтээгдэхүүн үйлдвэрлэдэг компанийг авч үзье[3].

Компанийн ашгийн функц  $\pi(x)$ , зардлын функц  $C(x)$ , бүтээгдэхүүний тоо хэмжээ  $x$ , нэгж бүтээгдэхүүний үнэ  $p$  болог. Тэгвэл компанийн ашиг

$$\pi(x) = px - C(x).$$

$\pi(x) = 0$  байх  $x$ -цэгийг компанийн хугарлын цэг гэж нэрлэдэг. Зардлын функц шугаман хэлбэртэй, өөрөөр хэлбэл,

$$C(x) = ax + b \quad \text{бол хугарлын цэгийг}$$

$$x^* = \frac{b}{p-a} \quad \text{гэж олно.}$$

Аль ч компанийн хувьд  $\pi \geq 0$  байх нь чухал.

Жишээлбэл: зардлын функц нь  $C(x) = ax^2 + bx + c$  гэсэн квадрат функц бол

$$\pi \geq 0 \quad \text{нөхцлийг бичье.}$$

$$\pi(x) = px - ax^2 - bx - c \geq 0$$

Эндээс:

$$ax^2 + (b-p)x + c \leq 0$$

нөхцөл дурын  $x$ -ийн хувьд биелэгдэхийн тулд

$$\begin{cases} a < 0 \\ \Delta = (b - p)^2 - 4ac \leq 0 \end{cases}$$

нөхцөл биелэгдэх ёстой. Өөрөөр хэлбэл:

$$(b - p)^2 - 4ac \leq 0 \quad (1)$$

үед компани ашигтай байна гэсэн үг.

Мөн 2 бүтээгдэхүүнээр монополь байх компанийн хувьд ашигтай байх нөхцлийг томъёолж болно. Монополь компанийн ашгийн функцийг бичье.

$$\pi(x_1, x_2) = p_1(x_1)x_1 + p_2(x_2)x_2 - c(x_1, x_2)$$

Монополь компанийн хувьд бүтээгдэхүүн тус бүрийн үнэ бүтээгдэхүүний тоо хэмжээнээс хамаарсан функц байна.

$$p_1 = p_1(x_1), p_2 = p_2(x_2).$$

$$\text{Жишээлбэл: } p_1 = a_1x_1 + b_1, p_2 = a_2x_2 + b_2,$$

$$c(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2$$

үед ашигтай байх нөхцлийг бичье.

$$\pi(x_1, x_2) = a_1x_1^2 + b_1x_1 + a_2x_2^2 + b_2x_2 - c_1x_1 - c_2x_2 \geq 0$$

Үүнийг эмхтгэн бичье.

$$a_1x_1^2 + (b_1 - c_1)x_1 + a_2x_2^2 + (b_2 - c_2)x_2 \geq 0 \quad (2)$$

Хэрэв компани нь бүтээгдэхүүн тус бүрээр ашигтай бол

$$\begin{cases} a_1x_1^2 + (b_1 - c_1)x_1 \geq 0 \\ a_2x_2^2 + (b_2 - c_2)x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (3)$$

Дээрх нөхцлүүд биелэгдэж байвал (2) биелэх нь илэрхий байна. Одоо (3) биелэх нөхцлийг бичвэл:

$$\begin{cases} x_1 \geq \frac{(c_1 - b_1)}{|a_1|} \\ x_2 \geq \frac{(c_2 - b_2)}{|a_2|} \end{cases} \quad (4)$$

Өөрөөр хэлбэл, (4) нөхцөл биелэгдэж байгаа үед компани нь ашигтай ажиллана.

Өмнөх жишээнд зардлын функц

$$c(x_1, x_2) = c_1 x_1^2 + d_1 x + c_2 x_2^2 + d_2 x$$

квадрат хэлбэртэй бол мөн л ашигтай байх нөхцлийг бичиж болно.

$$\pi(x_1, x_2) = a_1 x_1^2 + b_1 x_1 + a_2 x_2^2 + b_2 x - c_1 x_1^2 - d_1 x_1 - c_2 x_2^2 - d_2 x \geq 0$$

Эндээс:

$$(a_1 - c_1)x_1^2 + (b_1 - d_1)x_1 + (a_2 - c_2)x_2^2 + (b_2 - d_2)x \geq 0$$

Бүгээгдэхүүн тус бүрээр ашигтай байх нөхцөл нь

$$\begin{cases} x_1 \geq \frac{(d_1 - b_1)}{|a_1 - c_1|} \\ x_2 \geq \frac{(d_2 - b_2)}{|a_2 - c_2|} \end{cases} \quad (5)$$

Хэрэв компанийн ашгийн функцийг тухайд  $\pi(x) \geq \delta (\delta > 0)$  нөхцөл биелэгддэг бол энэ компанийг “ $\delta$ - ашигтай” компани гэж нэрлэнэ.

Одоо үнэ өгөгдсөн болон зардлын функц шугаман тохиолдолд компанийн ашигтай байх бүтээгдэхүүний мужийг тодорхойлъё. Өөрөөр хэлбэл,

$$\pi = p_1 x_1 + p_2 x_2 - c_1 x_1 - c_2 x_2 \geq \delta, (\delta > 0)$$

Нөхцлийг хангах  $(x_1, x_2)$ -ын ямар нэг олонлогийг олно гэсэн үг. Үүний тулд  $D$  олонлогийг байгуулна.

$$D = \{(x_1, x_2) \in R^2 \mid (c_1 - p_1)x_1 + (c_2 - p_2)x_2 \leq -\delta, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$$

$(x_1^0, x_2^0) \in R^2$  цэгт төвтэй  $r^0$  радиустай дугуй олонлог тодорхойлъё.

$$B(x_1^0, x_2^0, r^0) = \left\{ (x_1, x_2) \in R^2 \mid \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2} \leq r^0 \right\}$$

$B(x_1^0, x_2^0, r^0) \subset D$  байх мужийг дараах үр дүнгээр тодорхойлно.

Теорем [5].  $B(x_1^0, x_2^0, r^0) \subset D$  байх зайлшгүй ба хүрэлцээтэй нөхцөл нь  $(x_1^0, x_2^0, r^0)$  нь дараах шугаман программчлалын бодлогын шийд байх явдал юм.

$$\begin{cases} r \rightarrow \max_{(x_1, x_2, r)} \\ (c_1 - p_1)x_1 + (c_2 - p_2)x_2 + r\sqrt{(c_1 - p_1)^2 + (c_2 - p_2)^2} \leq -\delta & (6) \\ -x_1 + r \leq 0 \\ -x_2 + r \leq 0 \end{cases}$$

Энэ бодлогын үр дүнд дурын  $(h_1, h_2) \in R^2$ -ын хувьд

$$x = (x_1, x_2) = \left( x_1^0 + r_0 \frac{h_1}{\sqrt{h^2 + h_1^2}}, x_2^0 + r_0 \frac{h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \right) \quad (7)$$

$x$  нь үргэлж  $v$  олонлогт оршино. Өөрөөр хэлбэл,  $(x_1, x_2)$  нь компанийн “ $\delta$ -ашигтай” байлгах шийдүүдийн олонлог юм. (7) томьёо нь тэгэхлээр компанийн ашигтай ажиллах бүтээгдэхүүний тоо хэмжээний олонлогийг тодорхойлж байна.

Олон бүтээгдэхүүнтэй үеийн пүүсийн ашгийн функц нь

$$\pi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n p_j x_j - \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

болон ба (6) бодлого нь дараах хэлбэртэй байна.

$$r \rightarrow \max_{(x_1, x_2, \dots, x_n, r)}$$

$$\sum_{j=1}^n (c_j - p_j) x_j + r \sum_{j=1}^n \sqrt{(p_j - c_j)^2} \leq -\delta,$$

$$-x_j + r \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Бүтээгдэхүүний дундаж гарц  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  өгөгдсөн үед  $\delta$ -ашигтай” байх үнийн олонлогийг олъё.

$$\pi = p_1 \bar{x}_1 + p_2 \bar{x}_2 - c_1 \bar{x}_1 - c_2 \bar{x}_2 \geq \delta, \delta > 0$$

Дараах олонлогуудыг тодорхойлно.

$$\bar{D}_1 = \{(p_1, p_2) \in R^2 \mid \bar{x}_1 + p_2 \bar{x}_2 - c_1 \bar{x}_1 - c_2 \bar{x}_2 \geq \delta, p_1 \geq 0, p_2 \geq 0\},$$

$$\bar{B}(p_1^0, p_2^0, \bar{r}^0) = \left\{ (p_1, p_2) \in R^2 \mid \sqrt{(p_1 - p_1^0)^2 + (p_2 - p_2^0)^2} \leq 0, r > 0 \right\}$$

Одоо  $\bar{B}$   $\subset$   $\bar{D}$  нөхцлийг шалгах өмнөх теоремын үр дүнг хэрэглэвэл:

$$r \rightarrow \max_{(x_1, x_2, r)}$$

$$p_1 \bar{x}_1 + p_2 \bar{x}_2 - r \sqrt{\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2} \geq c_1 \bar{x}_1 + c_2 \bar{x}_2 + \delta$$

$$-p_1 + r \leq 0$$

$$-p_2 + r \leq 0$$

Дурын  $(\bar{h}_1, \bar{h}_2) \in R^2$ -ын хувьд

$$(p_1, p_2) = (p_1^0 + r^0 \frac{\bar{h}_1}{\sqrt{\bar{h}_1^2 + \bar{h}_2^2}}, p_2^0 + r^0 \frac{\bar{h}_2}{\sqrt{\bar{h}_1^2 + \bar{h}_2^2}})$$

цэг нь үргэлж  $\bar{D}$  олонлогт харъяалагдана. Энэ  $(p_1, p_2)$  нь компанийг “ $\delta$ - ашигтай” байлгах үнийн олонлогийг тодорхойлно. Мөн дээрх 2 бодлоготой адилаар компанийг “ $\delta$ - ашигтай” байлгах үнэ ба хувьсах зардлын мужийг зэрэг тодорхойлж болно. Үүнийг бичвэл:

$$\left\{ \begin{array}{l} r \rightarrow \max_{p_1, p_2, c_1, c_2, r} \\ p_1 \bar{x}_1 + p_2 \bar{x}_2 - c_1 \bar{x}_1 - c_2 \bar{x}_2 - r \sqrt{2\bar{x}_1^2 + 2\bar{x}_2^2} \geq \delta \\ -p_1 + r \leq 0 \\ -p_2 + r \leq 0 \\ -c_1 + r \leq 0 \\ -c_2 + r \leq 0 \end{array} \right.$$

Бодлогын шийд нь  $(p_1^*, p_2^*, c_1^*, c_2^*, r^*)$  байг. Тэгвэл дурин  $h = (h_1, h_2, h_3, h_4) \in R^4$ -ын хувьд бодогдсон  $v = (p_1, p_2, c_1, c_2)$  -ын хувьд

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 = p_1^* + r^* \frac{h_1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + h_4^2}} \\ p_2 = p_2^* + r^* \frac{h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + h_4^2}} \\ c_1 = c_1^* + r^* \frac{h_3}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + h_4^2}} \\ c_2 = c_2^* + r^* \frac{h_4}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + h_4^2}} \end{array} \right.$$

$v$  - нь компанийг “ $\delta$ - ашигтай” байх шийд болно. Өөрөөр хэлбэл,

$$\pi = p_1 \bar{x}_1 + p_2 \bar{x}_2 - c_1 \bar{x}_1 - c_2 \bar{x}_2 \geq \delta \text{ болно.}$$

**Жишээ 1.** Нэг  $(x_1)$ - бүтээгдэхүүн үйлдвэрлэдэг монополь компанийн үнийн функц ба зардлын функцууд харгалзан

$$p_1 = 6x_1 + 4, \quad c_1(x_1) = x_1^2 - 1$$

бол компанийн хугарлын цэгийн шинжилгээг хийе. Компанийн ашгийн функцийг бичвэл:

$$\pi_1 = p_1(x_1)x_1 - c_1(x_1) = 5x_1^2 + 4x_1 + 1$$

болох ба энэ квадрат гурван гишүүнтийн дискриминант

$$D = 16 - 20 < 0$$

тул  $\pi_1 > 0$  үргэлж биелнэ. Иймд энэ компани үргэлж ашигтай ажиллана.

**Жишээ 2.** Мөн нэг  $(x_2)$ - бүтээгдэхүүн үйлдвэрлэдэг монополь компанийн үнийн болон зардлын функцүүд нь

$$p_2(x_2) = 2x_2 - 6, \quad c_2(x_2) = x_2^2 - 8$$

гэж цээн хугарлын цэгийн шинжилгээ хийе. Компанийн ашгийн функц нь  $\pi_2 = x_2^2 - 6x_2 + 8$  болох ба  $\pi_2(2) = 0$ ,  $\pi_2(4) = 0$  тул  $x_1 = 2, x_2 = 4$  цэгүүд нь хугарлын цэгүүд болно. Компанийн ашигтай байх бүтээгдэхүүний муж нь

$$x = (-\infty, 2) \cup (4, +\infty) \text{ болно.}$$

**Жишээ 3.**  $(x_3)$  бүтээгдэхүүн үйлдвэрлэгч монополь компанийн үнийн болон зардлын функц

$$p_3(x_3) = x_3 + 5, \quad c_3(x_3) = 2x_3^2 + 7 \text{ гэж үзвэл}$$

түүний ашигт ажиллагааг шинжилье. Компанийн ашгийн функц

$$\pi_3 = -x_3^2 + 5x_3 - 7 < 0$$

болох ба квадрат 3 гишүүнтийн дискриминант нь  $D < 0$  тул  $\pi_3 < 0$  байна. Иймд энэ компани үргэлж алдагдалтай ажиллана. Энэ компанийн хувьд хугарлын цэг оршихгүй.

**Жишээ 4.** 2 төрлийн бүтээгдэхүүн үйлдвэрлэж буй компанийн тогтмол зардал  $c = 470,000,000$  ( $= 47 \cdot 10^7$  төг) байх ба  $p_1 = 1600, p_2 = 3800, c_1 = 400, c_2 = 270$ .

Компанийн  $x_1$  ба  $x_2$ -ыг үйлдвэрлэх хүчин чадал  $x_1 \leq 4500, x_2 \leq 100,000$  бол “ $\delta$ -ашигтай” байх шинжилгээ хийе. Компанийн ашгийн функцийг бичвэл:

$$\pi(x_1, x_2) = 1200x_1 + 3530x_2 - 47 \cdot 10^7.$$

(6) бодлого нь дараах хэлбэрт бичигдэнэ.

$$\left\{ \begin{array}{l} r \rightarrow \max \\ 1200x_1 + 3530x_2 - r\sqrt{(1200)^2 + (3530)^2} \geq \delta + 47 \cdot 10^7 \\ x_1 + r \leq 4500 \\ x_2 + r \leq 100,000 \\ -x_1 + r \leq 0 \\ -x_2 + r \leq 0 \end{array} \right.$$

Энэ бодлогын шийд нь  $x_1^* = 2250, x_2^* = 2943, r^* = 2250$ .

“ $\delta$ -ашигтай” байх  $x$ -ын мужийг бичвэл:

$$3256.231 \leq x_1 \leq 4262.461,$$

$$3949.256 \leq x_2 \leq 4955.487$$

Одоо дундаж үйлдвэрлэл  $\bar{x}_1 = 125,000, \bar{x}_2 = 63,000$  байх үед компани ашигтай байх үнийн олонлогийг олъё. Компанийн ашгийн функц нь

$$\pi = (p_1 - 400)\bar{x}_1 + (p_2 - 270)\bar{x}_2 - 47 \cdot 10^7.$$

$$a = 400 \cdot 125,000 + 270 \cdot 63,000 + 47 \cdot 10^7$$

гэж тэмдэглэн (6) бодлогыг бичвэл:

$$\left\{ \begin{array}{l} r \rightarrow \max \\ 125,000p_2 + 63,000p_2 - r\sqrt{(125,000)^2 + (63,000)^2} \geq a \\ p_1 + r \leq p_1^{\max} \\ p_2 + r \leq p_2^{\max} \end{array} \right.$$

үүнд  $p_1^{\max} = 2300, p_2^{\max} = 4200, \delta = 0.1$ .

Бодлогын шийд:  $p_1^* = 2253.9, p_2^* = 4153, r^* = 46$  тул “ $\delta$ - ашигтай” байх үнийн олонлог тодорхойльё.

$$2274.5 \leq p_1 \leq 2295,$$

$$4174.5 \leq p_2 \leq 4195.1.$$

Энэ муж дээр дээрх компани ашигтай ажиллана. Одоо (6) бодлогыг дээрх нөхцөлд хувьсах зардлуудтай хамт бодож үнийн болон хувьсах зардлуудын мужуудыг тогтооё. Үүнийг томъёолбол:



$$\left\{ \begin{array}{l} r \rightarrow \max \\ p_1 \bar{x}_1 + \bar{x}_2 p_2 - \bar{x}_1 c_1 - \bar{x}_2 c_2 - r \sqrt{2\bar{x}_1^2 + 2\bar{x}_2^2} \geq \delta + 47 * 10^7, \\ -p_1 + r \leq 0 \\ -p_2 + r \leq 0 \\ -c_1 + r \leq 0 \\ -c_2 + r \leq 0 \\ p_1 + r \leq p_1^{\max} \\ p_2 + r \leq p_2^{\max} \\ c_1 + r \leq c_1^{\max} \\ c_2 + r \leq c_2^{\max} \end{array} \right.$$

$\bar{x}_1 = 125,000, \bar{x}_2 = 63,000, p_1^{\max} = 2300, p_2^{\max} = 4200, c_1^{\max} = 2100, c_2^{\max} = 3200$   
 үед дээрх бодлогыг “Matlab” дээр бодвол, шийд:

$$p_1^* = 2156, p_2^* = 4056, c_1^* = 143, c_2^* = 143.$$

Компанийг “ $\delta$ - ашигтай” байлгах үнэ болон хувьсах зардлын мужийг  
 ( $h = (1,1,1,1)$ ) үед тогтоовол :

$$2085 \leq x_1 \leq 2228,$$

$$3985 \leq x_2 \leq 4128,$$

$$71 \leq c_1 \leq 214,$$

$$71 \leq c_2 \leq 214.56.$$

### Дүгнэлт

Компанийн хувьд хугарлын цэгийн шинжилгээг гүйцэтгэн “ $\delta$ -ашигтай” байх шинэ ойлголтыг тодорхойлсон. Компани нь “ $\delta$ -ашигтай” байх зайлшгүй ба хүрэлцээтэй нөхцлийг томъёолон, компанийг ашигтай байлгах бүтээгдэхүүн болон үнийн олонлогуудын мужийг шугаман программчлалын аргаар тогтоож болохыг харуулсан. Шинээр дэвшүүлсэн математик аргачлалыг аль ч компанийн хувьд хэрэглэж болно.

### Ашигласан материал

- [1] Hal R. Varian, Microeconomic Analysis, www.Norton and Company, 2002.
- [2] Alpha C. Chiang, Fundamental Methods of Mathematical Economics, McGRAW-HILL Book Company, 1996.

- [3] Н.Тунгалаг, “Зардал-Удирдлагын бүртгэл: Шинжилгээ-Загварчлал”, Улаанбаатар хот, 2004 он.
- [4] Р.Энхбат, “Оптимизаци-2”, Улаанбаатар хот, 2009 он
- [5] R. Enkhbat, Convex Maximization Formulation of General Sphere Packing Problem, *Izv. Irkutsk. Gos. Univ. Ser. Mat.* Vol.31, pp.142-149, 2020.