УРВУУ ШУГАМАН ПРОГРАММЧЛАЛЫН БИЗНЕС ДЭХ ХЭРЭГЛЭЭ

Р.Энхбат, Н.Тунгалаг

Хураангуй: Шугаман программчлалын урвуу бодлогыг шинээр томьёолон түүний шийд оршин байх мужийг оновчтой нөхцөлийн тусламжтайгаар тодорхойлсон. Пүүсийн ашигт ажиллагааны оновчтой горим мэдэгдэж байх үед загварын параметрүүдийг урвуу шугаман программчлалын аргаар тодорхойлж болохыг компанийн жишээн дээр харуулсан.

Түлхүүр үгс: шугаман программчлал, урвуу шугаман программчлал, оновчтой нөхцөл, оновчтой горим, пүүсийн маржинал орлого.

APPLICATION OF INVERSE LINEAR PROGRAMMING IN BUSINESS

Abstract: We introduce a new concept of linear programming and define a set of its solutions by optimality conditions of linear programming. For given optimality solutions of profit maximization problem, we define parameters of the problem by inverse programming approach. The proposed approach was tested on some examples of a company.

Key words: linear programming, inverse linear programming, optimality conditions, optimal solution, marginal revenue.

* МУИС, Бизнесийн сургууль, ШУА, Математик Тоон Технологийн Хүрээлэн (E-mail): enkhbatm@num.edu.mn

** МУИС, Бизнесийн сургууль, (E-mail): n.tungalag@num.edu.mn

Удиртгал

Шугаман программчлал нь шугаман функцийн их, бага утгуудыг шугаман тэнцэтгэл бишүүдийн зааглалаар өгөгдсөн олонлог дээр олох аргыг судалдаг оптимизацийн (оновчлолын) нэг салбар юм. Техник, эдийн засгийн ихэнх бодлогуудын загвар нь шугаман программчлалын бодлого хэлбэрээр томъёологддог. Оросын эрдэмтэн Л. В. Канторович 1939 онд шугаман программчлалын бодлогыг модны үйлдвэр дээр анх удаа томъёолж, онолын судалгаа гүйцэтгэсэн байдаг.

Л.В.Канторович нь шугаман программчлалыг эдийн засагт хэрэглэсэн анхны эрдэмтэн төдийгүй улмаар эдийн засгийн нөөцийг шугаман программчлалын аргаар оновчтой хувиарлах онол, аргыг боловсруулж 1975 онд Нобелын шагнал хүртсэн математикч билээ.

Шугаман программчлал нь тээврийн бодлого, бүхэл тоон шугаман программчлал, параметрт шугаман программчлал, сүлжээ тээврийн бодлого, хамгийн их урсгалын бодлого, бутархай шугаман программчлалын бодлого зэрэг олон чиглэлүүдийн үндэс нь болдог ба түүнчлэн оптимизацийн ихэнх шугаман биш бодлогуудыг бодох аргын туслах чанарын бодлого болж өгдөг.

Шугаман программчлалыг гол төлөв бодлогын зааглал, зорилгын функц өгөгдсөн үед түүний шийдийг олох замаар эдийн засагт хэрэглэж ирсэн. Бодлогын параметрүүдийн мэдрэмжийн шинжилгээг ч шугаман программчлалын аргаар гүйцэтгэдэг. Гэтэл бизнесийн ашигт ажиллагаанд оновчтой шийд өгөгдсөн үед бодлогын параметрүүдийг олох урвуу бодлого нь бага судлагдсан байдаг. Энэ өгүүлэлд дээрх асуудлыг шийдэх онолын үндэслэлийг дэвшүүлсэн болно.

1. Урвуу шугаман программчлал

Шугаман программчлалын бодлогын каноник хэлбэрийг авч үзье.

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min \\ \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b_i, \quad i = \overline{1,m}; \quad m < n \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n} \end{cases} \tag{1}$$

Үүнд a_{ij}, b_j, c_j нь бодлогын параметрүүд ба x_j хувьсагчид.

Шугаман программчлалын каноник хэлбэр дэх бодлогыг вектор хэлбэрт бичье. Ингэхийн тулд дараах вектор тэмдэглэгээг хийе.

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix},\quad A_{m\times n}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{m1}&a_{m2}&\dots&a_{mn}\end{pmatrix},\quad c=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{pmatrix}$$

Тэгвэл (1) бодлого нь дараах вектор хэлбэрт бичигдэнэ.

$$\langle c,x\rangle\to\min \tag{2}$$

$$Ax=b,\quad m<n \tag{3}$$

$$x\ge 0 \tag{4}$$

Үүнд $\langle\,,\rangle$ -нь 2 векторын скаляр үржвэрийг тэмдэглэнэ. Мөн c -г зорилгын функцын вектор, x -г хувьсагчдын вектор, b -г вектор зааглагч, A-г нөхцлийн матриц гэж тус тус нэрлэнэ.

(2)-(4) бодлогыг дараах хэлбэрт бичье.

$P(x):\quad x^*$ -г олох

$$\min_{x\in D}\langle c,x\rangle=\langle c,x^*\rangle$$

$$D=\left\{x\in R^n \,\middle|\, Ax=b,x\ge 0\right\}$$

Үүнд A нь (m*n) хэмжээст матриц, a^j нь A матрицын j-р багана, $j=1,2,...,n;\quad c,x\in R^n, b\in R^m$. A,b,c -г $P(x)$ бодлогын параметрууд гэж нэрлэе. x^* нь $P(x)$ бодлогын шийд болно.

Тодорхойлолт. Шугаман программчлалын бодлогын шийд x* өгөгдсөн үед түүний параметруудыг олох бодлогыг шугаман программчлалын урвуу бодлого буюу урвуу шугаман программчлал гэж нэрлэе. Урвуу шугаман программчлалын бодлогыг $P(z)$ гэж тэмдэглэвэл бусад параметрууд өгөдсөн үед z-г олно гэсэн үг юм. Цаашид $P(x)$ бодлогыг үл бөхөх бодлого гэж үзье[3].

2. Үл мэдэгдэх зорилгын функцтэй урвуу шугаман программчлал

Одоо $P(c)$ бодлогыг томъёолъё.

$$P(c): c\in R^n \text{ -г ол} \tag{5}$$

$$\min_{x\in D}\langle c,x\rangle=\langle c,x^*\rangle \tag{6}$$

$$D = \left\{ x \in R^n \middle| Ax = b, x \ge 0 \right\} \tag{7}$$

Энд A, b, x^* нь өгөгдсөн.

$K_0(x^*)$ олонлог тодорхойлъё.

$$K_0(x^*) = \left\{ \lambda c \,\middle|\, \min_{x \in D} \langle c, x \rangle = \langle c, x^* \rangle, \lambda \ge 0, c \in R^n \right\}$$

Теорем 1. Е матриц орших бөгөөд

$$K = \left\{ c \in R^n \middle| Ec \le 0 \right\} = K_0(x^*)$$

Баталгаа. Дурын $c \in R^n$ -г сонгоё. Тэгвэл x^* нь $P(x)$ бодлогын оновчтой шийд болог. Уг бодлого нь үл бөхсөн тул ерөнхий нийтлэлийг алдагдуулахгүйгээр x^* -г дараах хэлбэртэй гэж үзэж болно.

$$x^* = \left(x_1^*, x_2^*, \ldots x_m^*, 0, \ldots, 0\right)^T$$

Харгалзах суурь B болон c_B:

$$B = \left(a^1 a^2 \ldots a^m\right), \; c_B = \left(c_1, c_2, \ldots, c_m\right)^T .$$

(6) бодлогын хувьд x^* цэг дээр оновчтой байх нөхцлийг бичвэл [3]

$$\Delta_j = \langle c_B, x^j \rangle - c_j \le 0, \tag{8}$$

$$x^j = B^{-1} a^j,$$

$$x^j = \left(x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{mj}\right)^T, \quad j = \overline{1, n}$$

Нөгөө талаар $a^j \, (j = 1, 2, \ldots, n)$ векторууд суурьт байгаа тул. Иймд (8) нөхцөл нь

$$\Delta_j = \langle c_B, x^j \rangle - c_j \le 0, \quad j = \overline{m+1, n} \tag{9}$$

тэнцэтгэл бишүүдийн систем болно.

Одоо $d^j \in R^n, \quad j = \overline{m+1, n}$ векторуудыг тодорхойлъё:

$$d^j = \left(x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{mj}, 0, \ldots, -1, \ldots, 0, \ldots, 0\right)^T, \quad j = \overline{m+1, n}$$

Тэгвэл (9) нь дараах хэлбэртэй болно.

$$\langle d^j, c \rangle \le 0, \quad j = \overline{m+1, n} \tag{10}$$

$\left(d^j\right)^T$ мөрүүдээр матриц зохиож Е-ээр тэмдэглэвэл:

$$E = \begin{pmatrix} \left(d^{m+1}\right)^T \\ \left(d^{m+2}\right)^T \\ \ldots \\ \left(d^n\right)^T \end{pmatrix}$$

K олонлогийг дараах хэлбэртэй байгуулбал

$K = \left\{ c \in R^n \middle| E \le 0 \right\}$

$K_0(x^*) \subset K$ байх нь илэрхий юм.

Одоо $K \subset K_0(x^*)$ гэдгийг харуулъя. Эсрэгээс нь авч үзье. Өөрөөр хэлбэл, $\widetilde{c} \notin K_0(x^*)$ байх $\widetilde{c} \in K$ вектор оршдог гэж үзье. $\widetilde{c} \in K$ гэдгээс

$$\Delta_j = \left\langle \widetilde{c}_B, x^j \right\rangle - \widetilde{c}_j \le 0, \quad j = \overline{1,n}$$

мөрдөж гарна. Дээрх нөхцөл нь x^* нь (6) бодлогын шийд болох хүрэлцээтэй нөхцөл юм.

Нөгөө талаар $\widetilde{c} \notin K_0(x^*)$ гэдгээс

$$\left\langle \widetilde{c}, x^* \right\rangle > \min_{x \in D} \left\langle \widetilde{c}, x \right\rangle = \left\langle \widetilde{c}, \overline{x} \right\rangle, \ \overline{x} \in D$$

байх нь илэрхий юм. Энэ нь $\widetilde{c} \in K$ гэдэгт зөрчилд орж $K = K_0(x^*)$ болох нь батлагдав.

Мөн үүнтэй ижилхэнээр $\rho(b)$, $\rho(A)$ бодлогуудыг томьёолон бодох аргыг дэвшүүлж болно.

Жишээ 1.

$$c = ?$$

$$\max_{x \in D} \left(c_1 x_1 + c_2 x_2 \right) = c_1 x_1^* + c_2 x_2^*,$$

$$D: \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 15 \\ -6x_1 + 5x_2 + x_4 = 12 \\ x_j \ge 0, \ j = \overline{1,4} \end{cases}$$

$x^* = (3, 6, 0, 0)^T$

Бодолт: $x_1^* > 0, x_2^* > 0$ тул суурь матриц B

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$$

болно.

$c_B = (-c_1, -c_2)^T$. x^* цэг дээр оновчтой байх нөхцлийг бичихийн тулд $j = 3, 4$ үед Δ_j -г олъё. Харин $\Delta_1 = 0, \ \Delta_2 = 0$ байх нь илэрхий.

j=3 үед $B\beta^3 = a^3$ системийг бичвэл

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 1 \\ -6x_1 + 5x_2 = 0 \end{cases}$$

болох ба шийд нь $x_1 = \frac{5}{21}, x_2 = \frac{2}{7}$; $x^3 = \left(\frac{5}{21}, \frac{2}{7}\right)^T$

j=4 үед $B^{4} = a^4$ систем нь

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 0 \\ -6x_1 + 5x_2 = 1 \end{cases}$$

болж $x^4 = \left(-\frac{1}{21}, \frac{1}{7}\right)^T$ гэсэн шийдтэй гэдгийг хялбархан харж болно. Оновчтой нөхцлийг задлаж бичвэл:

$$\begin{cases} \Delta_3 = \left\langle c_B, x^3 \right\rangle - c_3 = -\frac{5}{21}c_1 - \frac{2}{7}c_2 \le 0 \\ \Delta_4 = \left\langle c_B, x^4 \right\rangle - c_4 = \frac{1}{21}c_1 - \frac{c_2}{7} \le 0 \end{cases}$$

Энэ тэнцэтгэл бишийн системийг бодож $K_0(x^*)$ -г олно. Иймд бодлогын шийд c —ийн олонлог нь

$$K_0(x^*) = \{(c_1, c_2) \,|\, 5c_1 + 6c_2 \ge 0,\ c_1 - 3c_2 \le 0\}$$

хэлбэртэй байна.

Жишээ 2.[8] Маржинал орлогын оновчтой муж

Пүүс А,Б гэсэн хоёр төрлийн бүтээгдэхүүн үйлдвэрлэнэ. А, Б бүтээгдэхүүн тус бүрийн нэгж тутмаас олох маржинал орлого дараах завсарт өөрчлөгдөнө.

$4 \le c_1 \le 12, \quad 5 \le c_2 \le 9.$

Хоёр бүтээгдэхүүний аль алинд материал, хөдөлмөр гэсэн нөөцүүд зарцуулагдах ба нэгж А-г үйлдвэрлэхэд 4 нэгж материал, 4 цагийн хөдөлмөр, нэгж Б-г үйлдвэрлэхэд 6 нэгж материал, 2 цагийн хөдөлмөр зарцуулагдана. Тухайн үед 16 цагийн хөдөлмөр, 24 нэгж материалын нөөцтэй гэж үзье.

Удирдлага тухайн хугацаанд үйлдвэрлэх бүтээгдэхүүний оновчтой хослолыг (3,2) гэж үзсэн бол оновчтой маржинал орлогуудын олонлогийг тодорхойльё.

Бодолт:

Нийт орлого: $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2$

Материалын хязгаарлалт: $4x_1 + 6x_2 \le 24$

Хөдөлмөрийн хязгаарлалт: $4x_1 + 2x_2 \le 16$

Сөрөг биш байх хязгаарлалт: $x_1, x_2 \geq 0$

Маржинал орлогын зааглал:

$4 \leq c_1 \leq 12, \quad 5 \leq c_2 \leq 9.$

Оновчтой үйлдвэрлэлтийн хэмжээ:

$x_1^* = 3, \; x_2^* = 2.$

Дээрх бодлого нь тодорхой бус зорилгын функцтэй урвуу шугаман программчлалын бодлого болж байна. Үүнийг бичвэл:

$$P(c): \; Max\,(c_1 x_1 + c_2 x_2) = 3c_1 + 2c_2$$

$4 \leq c_1 \leq 12$

$5 \leq c_2 \leq 9$

$4x_1 + 6x_2 \le 24$

$4x_1 + 2x_2 \le 16$

$x_1, x_2 \geq 0$

Дээрх аргаар бодож конус $K_0(x^*)$ -г байгуулбал

$$K_0(x^*) = \{(c_1, c_2) \mid 2c_2 - 3c_1 \geq 0,\, 2c_2 - c_1 \leq 0\}.$$

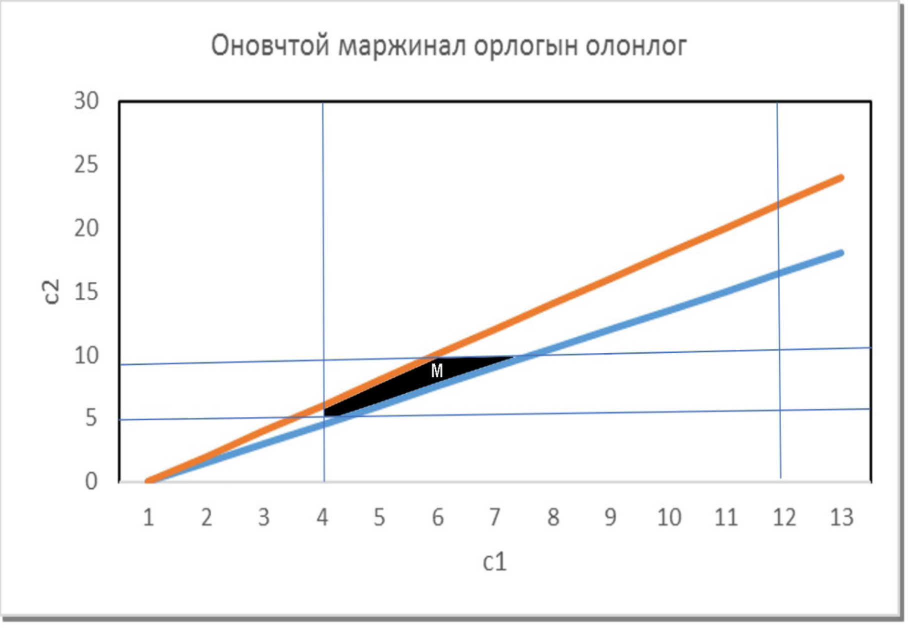
Нөгөө талаас маржинал орлогуудын олонлогийг D-ээр тэмдэглэвэл:

$$D = \{(c_1, c_2) \mid 4 < c_1 < 12,\, 5 < c_2 < 9\}$$

Тэгвэл $P(c)$ бодлогын шийд буюу оновчтой маржинал орлогуудын олонлог M нь $K_0(x^*)$ ба D олонлогуудын огтолцол байна. Өөрөөр хэлбэл,

$$M = K_0(x^*) \cap D.$$

Энэ олонлогийг координатын систем дээр дүрсэлбэл



Дүгнэлт:

Үрвуу шугаман программчлалын бодлогыг шинээр томьёолон түүний шийд оршин байх мужийг оновчтой нөхцөлийн тусламжтайгаар томьёолсноор бизнесийн үр дүнгийн аливаа зорилтууд өгөгдсөн тохиолдолд уг зорилтын шугаман загварын параметрүүдийн оновчтой мужийг тодорхойлох шинэ арга бий болсоныг энэхүү өгүүлэлд авч үзэв. Дэвшүүлсэн аргын хэрэглээг компанийн оновчтой маржинал орлогын олонлогийг тодорхойлох жишээн дээр бодож харуулав.

Талархал: Энэхүү бүтээлийг Бизнесийн сургуулийн "Эрдэм шинжилгээний төсөл-2022" –ийн дэмжлэгтэйгээр гүйцэтгэв.

Ашигласан материал:

[1] С.Дэнзэн, Математик програмчлал, Улаанбаатар, 1985

[2] С.И. Зуховский, Л.И. Авдеева, Линейние и выпуклое программирование, Наука, 1988

[3] Р.Энхбат, Оптимизаци 2, МУИС пресс, 2009

[4] Ahmed Belkaoui, Quantitative Models in Accounting, Quorum Books, 1996

[5] Thad W.Mirer, Economic Statistics and Econometrics, Printice-Hall, Inc. USA, 1995

[6] “Японы удирдлагын бүртгэлийн хөгжил”, ЭДИЙН ЗАСАГ: онол практик сэтгүүл, №5, 2002

[7] Н.Тунгалаг ба бусад “Зардлын хамаарлыг судлах аргазүйн зарим асуудал” ЭШ-ний өгүүлэл, МУИС-ийн эрдэм шинжилгээний бичиг, №5/149/, УБ, 1999

[8] Н.Тунгалаг, Зардал-Удирдлагын бүртгэл: шинжилгээ, загварчлал, Хөх судар принтинг, 2004