

USING EXTENDED PORTFOLIO SELECTION IN INVESTMENT STRATEGIES

Narangoo Ganbaatar^I, Ankhbayar Chuluunbaatar^{II}

Abstract: This study aims to determine the optimal investment portfolio based on the investor's objective, expected return, risk tolerance, and investment cost. As a practical case study, we use quantitative data from 2013 to 2024 for six non-correlated companies listed in Mongolian stock exchange's Top 20 Index, including APU, Gobi, Makhimpex, Suu, Talkh Chikher, and Tavan Tolgoi. The optimization problem is formulated with the objective function of minimizing the risk per unit of return, subject to the following constraints: the expected return of the portfolio must be no less than 0.142, the level of portfolio risk does not exceed 0.062, and the initial investment cost modeled by a logistic distribution does not exceed 0.097. The optimal solution to this problem yields the following portfolio allocation: APU – 5.4%, Gobi – 6.8%, Makhimpex – 30.3%, Suu – 8.9%, Talkh Chikher – 28.4%, and Tavan Tolgoi – 20.2%. For this portfolio, the risk level is reduced by 26% compared to the initial value.

Keywords: Return, cost, risk, objective function, logistic distribution

ХӨРӨНГӨ ОРУУЛАЛТЫН СТРАТЕГИД ӨРГӨТГӨСӨН БАГЦЫН СОНГОЛТЫГАШИГЛАХ НЬ

Хураангуй: Энэхүү судалгааны ажлаар хөрөнгө оруулалтад тохирсон хувьцааны багцыг хөрөнгө оруулагчийн зорилго, хүлээгдэж буй өгөөж, эрсдэл тэсвэрлэлт, хөрөнгө оруулалтын зардал дээр үндэслэн хөрөнгө оруулалтын багцын оновчтой шийдийг тооцлоо. Бодит жишээ болгон Монголын хөрөнгийн биржийн топ 20 индекст багтаж буй Апу, Говь, Махимпекс, Сүү, Талх чихэр, Таван толгой гэсэн үл хамаарах компануудын хувьцааны 2013-2024 оны тоон мэдээллийг ашигласан. Бид санал болгож буй загвартаа багцын хүлээгдэж буй өгөөжийг 0.142-с багагүй, багцын эрсдэлийн түвшинг 0.062-с ихгүй, Логистик тархалттай зардлын босго утгыг 0.097-с ихгүй гэсэн хязгаарлалтын нөхцөлийг хангах нэг төгрөгийн өгөөжид ногдох эрсдэлийг минимумчлах зорилгын функцтэй бодлого дэвшүүлсэн. Тус бодлогын оновчтой шийдийн үр дүнд багцын хуваарилалт АПУ-5.4%, Говь-6.8%, Махимпекс-30.3%, Сүү-8.9%, Талх чихэр-28.4%, Таван толгой-20.2% байхаар тооцогдож байна. Энэ багцын хувьд эрсдэлийн түвшин босго утгаас 26 хувиар буурсан.

Түлхүүр үгс: Өгөөж, зардал, эрсдэл, Логистик тархалт

^I School of information technology and electronics, National university of Mongolia, (E-mail): narangoo.g@num.edu.mn

^{II} Business School, National University of Mongolia, (E-mail): ankhbayar.ch@num.edu.mn

I. УДИРТГАЛ

Хөрөнгө оруулалтын стратегийн хувьд эрсдэл, өгөөжийн сонголт ямагт тулгардаг. Гарри Марковицын тодорхойлсноор нэгт өгөгдсөн өгөөжийн түвшинд эрсдэлийг хамгийн бага байлгах, хоёрт өгөгдсөн эрсдэлийн түвшинд өгөөжийг хамгийн их байлгах гэсэн үндсэн стратегиуд байдаг. Хөрөнгө оруулагчдын хувьд энэхүү үндсэн стратегиудаас гадна эрсдэл даах чадвар, хөрөнгө оруулалтын зардал, үнэ ба ханшийн тренд хандлагуудыг авч үзэх зайлшгүй шаардлагатай тулгардаг.

Бидний сайн мэдэх хөрөнгө оруулалтын үндсэн стратегийн загвар нь дундаж-вариацийн загвар юм. Энэхүү загварыг цааш капитал хөрөнгийн үнийн загвар CAPM (Sharpe, 1964), CAPM-н өргөтгөсөн хөрөнгө оруулалтын багцын загвар (Lintner, 1965), капитал хөрөнгийн зах зээлийн тэнцвэрт байдал (Mossin, 1966), арбитражийн үнийн онол АРТ (Ross, 1976), үр ашигтай хөрөнгийн зах зээл (Fama, 1970), урт хугацаанд геометр өсөлттэй багцын загвар (Hakanesson, 1971), тасралтгүй хугацаатай хөрөнгө оруулалт (Merton, 1971), зах зээлийн бус хөрөнгөтэй CAPM (Mayers, 1972), үе хоорондын капитал хөрөнгийн үнийн загвар ICAPM (Merton, 1973) зэрэг капитал хөрөнгийн болон опционы үнийн загваруудын чиглэлээр 1960-1980 онуудад өргөтгөжээ.

Өгөөж, пүүсийн хэмжээний хамаарал (Banz, 1981), том хэмжээтэй багцын оновчлол (Perold, 1984), өгөөжийг үнэлэхэд Байесын аргыг хэрэглэх (Frost et al, 1986), макро эдийн засгийн хүчин зүйлсийг ашигласан АРТ (Chen et al, 1986), хэсэгчилсэн моментод хөрөнгийн үнэ тогтоох MLPM (Harlow, 1989), дундаж абсолют хазайлт MAD (Konno et al, 1991), дундаж-хагас вариаци (Markowitz, 1993), багцын стохастик оновчлолын аргууд (Pflug, 1996), хамгийн их эрсдэл VaR (Jorion, 1996), уялдсан эрсдэлийн хэмжээс (Artzner et al, 1999), нөхцөлт хамгийн их эрсдэлийн арга CVaR (Rockafellar et al, 2000) зэргээр 1980-2000 онуудад Марковицын загварыг арга зүйн хувьд өргөтгөн судалжээ.

Ковариацийн матрицын хэмжээг багасгах (Ledoit et al, 2003), нөхцөлт авторегрессив VaR (Engle et al, 2004), нормоор хязгаарлалттай багцууд (DeMiguel et al, 2010), ковариацийн матрицын шугаман агшилтын аргууд (Ledoit et al, 2017), параметрыг Байесын аргаар үнэлэх (Ardia et al, 2017), хүчин зүйлсийг тогтоохдоо машин сургалтыг хэрэглэх (Feng et al, 2020) зэргээр 2000-2020 онуудад ковариацийн матриц болон хязгаарлалтууд дээр математик анализын аргыг хэрэглэжээ.

Хүчин зүйлд суурилсан ковариацийн матриц (De Nard et al, 2021), хөрөнгийн үнэ тогтоох болон багц сонголтод гүн сургалтыг хэрэглэх (Chen et al, 2023), удирдлагын мэдрэмжийн чанарын өгөгдлийг AI ашиглан ковариацийн матрицыг тооцох (Wang et al, 2024) зэрэг 2021 оноос хойш машин сургалт, AI зэргээр судлагдах болсон.

Эдгээр өргөтгөсөн загваруудаас харахад хөрөнгө оруулалтын багц сонголтод эрсдэлтэй болон эрсдэлгүй хөрөнгө, хөрөнгийн хүлээгдэж буй өгөөж, эрсдэлгүй хүү,

хөрөнгийн зах зээлийн хөдөлгөөнд мэдрэмтгий байдлын хэмжээс, зах зээлийн багц, геометр дундаж өгөөж, ковариацийн матриц, ханамжийн функц, харьцангуй эрсдэлээс зайлсхийх хөрөнгө оруулалтын зардлын коэффициент, эрсдэлтэй хөрөнгийн вариаци, стандарт хазайлт, сөрөг нөлөөлөх эрсдэл, эрсдэлд тэсвэртэй байдал, ажиглагдсан болон далд хүчин зүйл, хамгийн их эрсдэл (VaR), нөхцөлт хамгийн их эрсдэл (CVaR), санхүүгийн харьцаа гэсэн хүчин зүйлүүдийг нэмж өгчээ.

Бидний судалгааны ажлын гол онцлог бол шинээр багц сонголтод хөрөнгө оруулалтын зардлыг нэмж өгсөн. Ингэхдээ тус хязгаарлалтын зардлын тархалтыг Логистик тархалтын хэлбэрээр аван өргөтгөл хийсэн. Судалгааны ажил дараах бүтэцтэй байна. Хоёрдугаар хэсэгт хөрөнгө оруулалтын багцын сонголтын онол, байгуулж буй загварын арга зүйн үндэслэлийг тайлбарлана. Гуравдугаар хэсэгт загвартай холбоотой тоон үзүүлэлтүүдийг тооцоолж, загваруудыг байгуулж, оновчтой шийдийг олно. Сүүлийн хэсэгт нь загвартай холбоотой үр дүнг нэгтгэнэ.

II. ОНОЛ, АРГА ЗҮЙН ҮНДЭСЛЭЛ

Энэхүү судалгаанд авч үзэх хувьцааны ханшийг (S), хувьцааны тоог (n), нийт багцад эзлэх i -р хувьцааны хувийн жинг (x_i), i -р хувьцааны ханшийн өсөлтийг (G_i), хувьцааны ханшийн зардлыг (C_i) гэж тэмдэглэе. Эдгээр тэмдэглэгээг ашиглан

$$r_p = \sum_{i=1}^n x_i G_i, \quad (1)$$

гэж бичих ба математик дунджийн шугаман чанарыг ашиглавал багцын дундаж өгөөж

$$\mu_p = E[r_p] = E\left[\sum_{i=1}^n x_i G_i\right], \quad (2)$$

болно. Энд $E[r_p]$ -ээр r_p санамсаргүй хэмжигдэхүүний математик дундаж, $E[G_i]$ нь i -р үнэт цаасны хүлээгдэж буй өгөөжийг илэрхийлнэ. Одоо багцын өгөөжийн вариацийг бичвэл

$$\sigma_p^2 = Var\left[\sum_{i=1}^n x_i G_i\right], \quad (3)$$

байна. Хөрөнгө оруулалтын шийдвэр гаргах нэг хүчин зүйл нь вариацийн коэффициент байдаг. Тус коэффициент нь 1 төгрөгийн өгөөж хүртэхийн тулд хичнээн төгрөгийн эрсдэл хүлээж байгааг илэрхийлдэг. Тэгшитгэл (1) ба (2)-г ашиглан вариацийн коэффициентыг багцын хувьд дараах байдлаар бичиж болно.

$$\min \frac{Var[\sum_{i=1}^n x_i G_i]}{E[\sum_{i=1}^n x_i G_i]} \quad (4)$$

Хөрөнгө оруулалт хийхээсээ өмнө өгөөжийн тодорхой хүлээлттэй байдаг. Энэ үед хүлээгдэж буй өсөлт нь хүлээгдэж буй өгөөж юм. Хүлээгдэж буй дундаж өгөөж нь хүлээн зөвшөөрөгдөх хамгийн бага босго хэмжээнээс өндөр байх ёстой. Энэхүү босго утгыг хөрөнгө оруулагч нар өөрсдөө тогтооно.

$$E \left[\sum_{i=1}^n x_i G_i \right] \geq \mu_0 \quad (5)$$

Энд μ_0 нь хөрөнгө оруулагчийн шаардагдаж буй хамгийн бага өгөөжийн түвшинг илэрхийлнэ.

Хувьцаа авах, зарахад тодорхой хэмжээний зардал гарна. Хөрөнгө оруулалтын дундаж зардал нь дээд хязгаарын босго утгаас давах магадлал нь $1 - \alpha$ -с их буюу тэнцүү байна гэсэн зааглал тавья. Тэгвэл

$$P \left(\sum_{i=1}^n x_i C_i \leq c_0 \right) \geq 1 - \alpha, \quad (6)$$

байх ба энд c_0 нь хөрөнгө оруулалтын дээд зардлын утга, α нь итгэх түвшинг тус тус илэрхийлнэ.

Хөрөнгө оруулалтын багцын эрсдэл нь тооцоолж буй багцын эрсдэлээс доогуур байна.

$$\sigma_p^2 = \text{Var} \left[\sum_{i=1}^n x_i G_i \right] \leq \sigma_0^2 \quad (7)$$

Энд σ_0^2 нь анхны нөхцөлд тулгуурласан хөрөнгө оруулалтын тооцоолсон эрсдэлийн түвшинг илэрхийлнэ.

Цааш нь бид багцын дундаж өгөөж, багцын эрсдэлтэй холбогдуулан дараах хоёр чанарыг авч үзье.

Чанар 1. Хэрэв $G_1, G_2, \dots, G_n$ санамсаргүй хэмжигдэхүүнүүд ба дурын $a_1, a_2, \dots, a_n \in R$ тоонуудын хувьд

$$E \left[\sum_{i=1}^n a_i G_i \right] = \sum_{i=1}^n a_i E[G_i], \quad (8)$$

байна. Үүний баталгааг (Liu, 2007)-с харна уу.

Чанар 2. Хэрэв $G_1, G_2, \dots, G_n$ санамсаргүй хэмжигдэхүүнүүд ба дурын $a_1, a_2, \dots, a_n \in R$ тоонуудын хувьд

$$\text{Var} \left[\sum_{i=1}^n a_i G_i \right] = \sum_{i=1}^n a_i^2 \text{Var}[G_i], \quad (9)$$

байна. Баталгааг (Kopp et al, 2013)-с харна уу.

Дээрх хоёр чанарт $G_1, G_2, \dots, G_n$ үл хамаарах, нэгэн ижил хэвийн тархалттай $G_i \sim \text{IIN}(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1, 2, \dots, n$ гэсэн нөхцөлийг оруулбал чанар 1-с

$$E \left[\sum_{i=1}^n x_i G_i \right] = \sum_{i=1}^n x_i E[G_i] = \sum_{i=1}^n x_i \mu_i, \quad (10)$$

чанар 2-с

$$\text{Var} \left[\sum_{i=1}^n x_i G_i \right] = \sum_{i=1}^n x_i^2 \text{Var}[G_i] = \sum_{i=1}^n x_i^2 \sigma_i^2, \quad (11)$$

болно. Энэхүү судалгааны гол онцлогийг илэрхийлэх хөрөнгө оруулалтын зардлыг $C_i, i = 1, 2, \dots, n$ үл хамаарах нэгэн ижил ε дундажтай, S стандарт хазайлттай Логистик тархалттай гэж үзье. Энэ тохиолдолд хөрөнгө оруулалтын зардлын дээд утгыг тухайн тархалтын тодорхой итгэлцүүрийн магадлалын түвшнээс хэтрэхгүй байхаар

$$\sum_{i=1}^n x_i F_{C_i}^{-1}(1 - \alpha) \leq c_0 \quad (12)$$

гэж бичиж болно. Цааш нь Лемма 1-г ашиглан $F_{C_i}^{-1}(1 - \alpha)$ -н хэлбэрийг тодорхойлъё.

Лемма 1. C санамсаргүй хэмжигдэхүүн ε дундажтай, S стандарт хазайлттай Логистик тархалттай бол тархалтын функц нь

$$F_C(x) = \frac{1}{1 + \exp\left(-\frac{x - \varepsilon}{S}\right)}, \quad x \in R, \quad (13)$$

хэлбэртэй байна. Энд S нь Логистик тархалтын стандарт хазайлт. Хэрэв хөрөнгө оруулалтын зардлуудыг γ стандарт хазайлттай хэвийн тархалттай гэж үзвэл $S^2 = \frac{3\gamma^2}{\pi^2}$ тэнцүү байна. Үүнийг (13)-т орлуулбал

$$F_C(x) = \left(1 + \exp\left(\frac{\pi(\varepsilon - x)}{\sqrt{3}\gamma}\right) \right)^{-1}, \quad x \in R, \quad \gamma > 0, \quad (14)$$

гарна.

Лемма 2. Логистик тархалтын $F_C(x) = p$ үед түүний урвуу функц $F_C^{-1}(p)$ нь

$$F_C^{-1}(p) = \varepsilon + \frac{\sqrt{3}\gamma}{\pi} \ln \frac{p}{1 - p}, \quad 0 < p < 1, \quad (15)$$

гэж илэрхийлэгдэнэ.

Баталгаа. Тэгшитгэл (14)-с

$$\left(1 + \exp\left(\frac{\pi(\varepsilon - x)}{\sqrt{3}\gamma}\right)\right)^{-1} = p$$

гэдгээс

$$\exp\left(\frac{\pi(\varepsilon - x)}{\sqrt{3}\gamma}\right) = \frac{1}{p} - 1.$$

Цааш нь x -г олбол

$$x = \varepsilon - \frac{\sqrt{3}\gamma}{\pi} \ln \frac{1-p}{p} = \varepsilon + \frac{\sqrt{3}\gamma}{\pi} \ln \frac{p}{1-p},$$

ба

$$F_C^{-1}(p) = \varepsilon + \frac{\sqrt{3}\gamma}{\pi} \ln \frac{p}{1-p}, \quad (16)$$

болж батлагдав.

Лемма 2-г хөрөнгө оруулалтын зардлын хязгаарлалтын нөхцөл $\sum_{i=1}^n x_i F_{C_i}^{-1}(1 - \alpha) \leq c_0$ -д оруулбал

$$\sum_{i=1}^n x_i \left(\varepsilon_i + \frac{\sqrt{3}\gamma_i}{\pi} \ln \frac{1-\alpha}{\alpha} \right) \leq c_0 \quad (17)$$

гарна.

Дээрх тэгшитгэл (10), (11), (16)-н үр дүнг нэгтгэвэл Логистик тархалттай нөхцөл дэх хөрөнгө оруулалтын стратегийг дараах загвараар илэрхийлж болно.

Хөрөнгө оруулалтын зардал Логистик тархалтын нөхцөл дэх нэг төгрөгийн өгөөжид ногдох эрсдэл минимум байх хөрөнгө оруулалтын стратегийн загвар

Зорилгын функц

$$\min_{x_i} \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sigma_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i \mu_i}$$

Хязгаарлалтууд

(18)

$$\sum_{i=1}^n x_i \mu_i \geq \mu_0$$

$$\sum_{i=1}^n x_i \left(\varepsilon_i + \frac{\sqrt{3}\gamma_i}{\pi} \ln \frac{1-\alpha}{\alpha} \right) \leq c_0$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 \sigma_i^2 \leq \sigma_0^2$$

Зааглалтын утгууд

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_n &= 1 \\ x_i &\geq 0, i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

III. ТООН ҮР ДҮН

Хөрөнгө оруулалтын стратегийн загвартаа хоорондоо үл хамаарах АПУ, Говь, Махимпекс, Сүү, Талх чихэр, Таван толгой зэрэг нийт 6 хувьцаат компанийн үнэт цаасны арилжигдсан 2014-2024 оны тоон өгөгдлийг авч ашиглав. Хүснэгт 1-т эдгээр компаниудын хувьцааны ханшийн жил бүрийн өсөлтийн хувийг үзүүлэв.

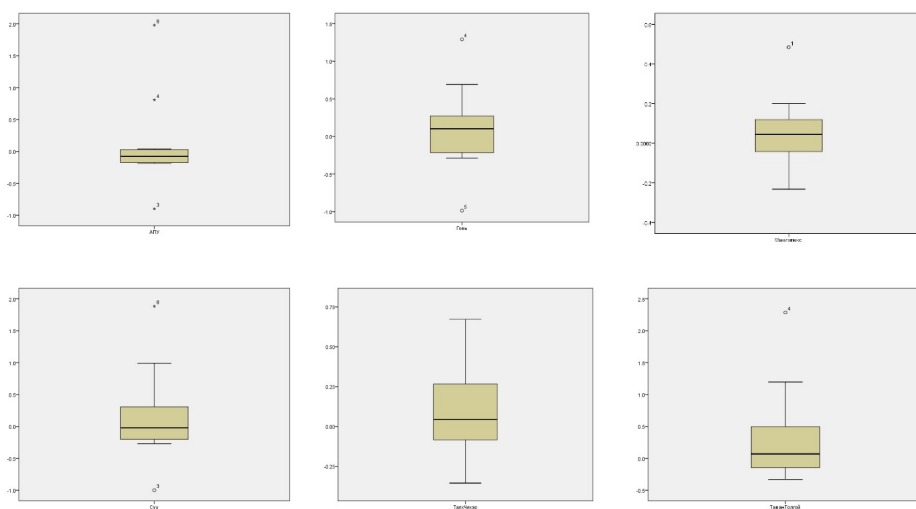
Хүснэгт 1. Хувьцааны үнийн өсөлт, бууралтууд

Он	АПУ	Говь	Махимпекс	Сүү	Талх чихэр	Таван толгой
2014	-0.077	0.347	0.484	0.340	0.336	-0.274
2015	0.038	0.138	-0.232	-0.183	-0.061	-0.329
2016	-0.898	0.197	-0.032	-0.999	0.043	-0.081
2017	0.809	1.292	0.045	0.990	0.650	2.287
2018	-0.132	-0.986	-0.042	-0.200	-0.355	-0.191
2019	0.021	-0.191	-0.041	0.026	-0.211	-0.098
2020	-0.047	-0.287	0.098	-0.021	0.081	0.086
2021	1.981	0.692	0.200	1.885	0.672	0.070
2022	-0.174	-0.237	0.089	-0.200	0.196	0.073
2023	-0.188	0.102	-0.079	-0.269	-0.106	1.197
2024	-0.173	-0.057	0.141	0.274	0.005	0.910
Минимум	-0.898	-0.986	-0.232	-0.999	-0.355	-0.329
Квартил 1	-0.174	-0.237	-0.042	-0.200	-0.106	-0.191
Медиан	-0.077	0.102	0.045	-0.021	0.043	0.070
Дундаж	0.105	0.092	0.057	0.149	0.114	0.332
Квартил 3	0.038	0.347	0.141	0.340	0.336	0.910
Максимум	1.981	1.292	0.484	1.885	0.672	2.287

Эх сурвалж: *tse.mn*

Хүснэгтээс АПУ компанийн хувьд хамгийн өндөр өсөлт 2017 онд (1.981), харин хамгийн их бууралт 2016 онд (-0.898), Говь компанийн хувьд хамгийн их өсөлт 2017 онд (1.292), хамгийн их бууралт 2018 онд (-0.986), Махимпекс компанийн

хувьд хамгийн их өсөлт 2017 онд (0.484), хамгийн их бууралт 2015 онд (-0.232), Сүү компанийн хувьд хамгийн их өсөлт 2021 онд (1.885), хамгийн их бууралт 2016 онд (-0.999), Талх чихэр компанийн хувьд хамгийн их өсөлт 2021 онд (0.672), хамгийн их бууралт 2018 онд (-0.355), Таван толгой компанийн хувьд хамгийн их өсөлт 2017 онд (2.287), хамгийн их бууралт 2015 онд (-0.329) байна. Говь компанийн медиан болох 50% дээрх утга хамгийн өндөр 0.102, АПУ компанийн утга хамгийн бага -0.077, мөн АПУ болон Сүү компаниудын утга сөрөг байна. Компаниудын дундаж өгөөж бүгд эерэг бөгөөд Таван толгой компанийнх хамгийн өндөр 0.332, Говь компанийнх хамгийн бага 0.092, нийт дундаж өсөлт 0.142 байна. Эдгээр хувьцаат компаниудын үнийн өсөлт, бууралтаар хайрцган диаграмм байгуулъя.



Диаграммаас харахад медианаас дээш давсан утгууд АПУ компанийн хувьд харьцангуй тогтвортой, Говь, Сүү, Талх чихэр, Таван толгой компаниудын хувьд өндөр, Махимпекс компанийн хувьд бага байна. Таван толгой компанийн хувьд минимум, медиан, дундаж, кватил 3, максимум утгууд өндөр үзүүлэлттэй байгаагаас харахад энэ компанийн хувьцааны үнийн өсөлт нь харьцангуй өндөр өсөлттэй, бусад компаниудын хувьд хязгаараас давсан утгатай тогтворгүй байна.

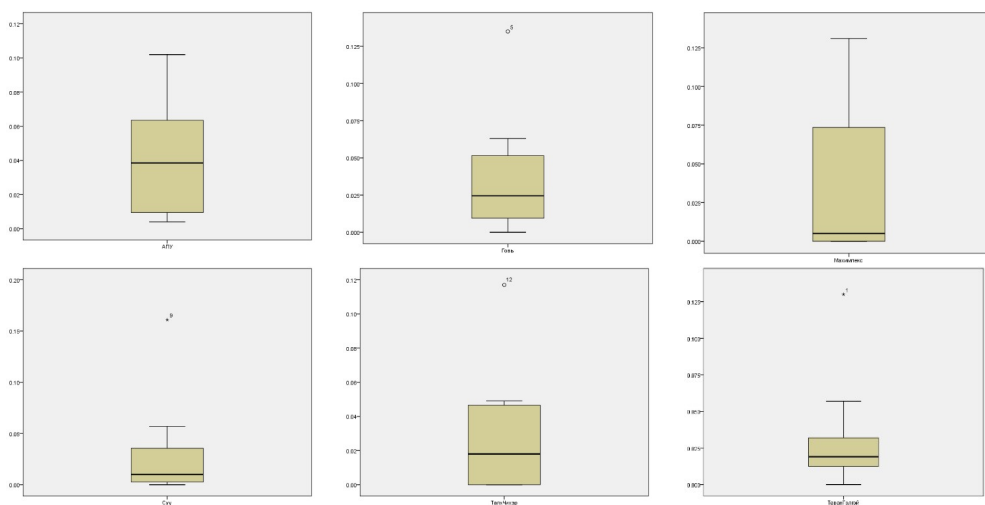
Хувьцаа худалдан авах, зарахтай холбоотой зардлыг Хүснэгт 2-т харуулав.

Хүснэгт 2. Хөрөнгө оруулалтын зардлын хувиуд

Он	АПУ	Говь	Махимпекс	Сүү	Талх чихэр	Таван толгой
2013	0.012	0.055	0.114	0.000	0.014	0.130
2014	0.005	0.000	0.000	0.000	0.049	0.023
2015	0.013	0.011	0.005	0.000	0.008	0.000
2016	0.038	0.035	0.000	0.016	0.022	0.037
2017	0.039	0.135	0.000	0.052	0.049	0.008
2018	0.102	0.048	0.056	0.005	0.026	0.014
2019	0.051	0.019	0.131	0.019	0.044	0.025
2020	0.042	0.002	0.000	0.005	0.000	0.013
2021	0.076	0.030	0.091	0.161	0.000	0.027
2022	0.007	0.008	0.000	0.006	0.000	0.012
2023	0.096	0.063	0.023	0.014	0.000	0.057
2024	0.004	0.012	0.005	0.057	0.117	0.015
Минимум	.004	.000	.000	.000	.000	.000
Квартил 1	.008	.009	.000	.001	.000	.012
Медиан	.039	.025	.005	.010	.018	.019
Дундаж	.040	.035	.035	.028	.027	.030
Квартил 3	.070	.053	.082	.044	.048	.035
Максимум	.102	.135	.131	.161	.117	.130

Эх сурвалж: mse.mn

Хүснэгтийн утгуудыг хэрэглэн хөрөнгө оруулалтын зардлын хайрцган диаграмм байгуулъя.



Хүснэгт болон графикаас харахад бүх компаниуд хөрөнгө оруулалтын зардал өндөр гарсан байна. Харин хөрөнгө оруулалтын зардлын хувьд АПУ болон Махимпекс компаниуд харьцангуй өндөр хэлбэлзэлтэй, Сүү болон Таван толгой компаниуд бага хэлбэлзэлтэй, Говь болон Талх чихэр компаниуд харьцангуй тогтвортой байна.

Арга зүйн хэсэгт авч үзсэн хөрөнгө оруулалтын стратегийн загварт хувьцаат компаниудын хувьцааны ханшийн өгөөж $G_1, G_2, \dots, G_n$ үл хамаарах, нэгэн ижил Хэвийн тархалттай, хөрөнгө оруулалтын зардал $C_1, C_2, \dots, C_n$ үл хамаарах, нэгэн ижил Логистик тархалттай гэж таамагласан учир эдгээр тархалтуудын параметруудийн утгыг Хүснэгт 3-т харуулав.

Хүснэгт 3. Параметруудийн утга

Параметруудийн утга		АПУ	Говь	Махимпекс	Сүү	Талх чихэр	Таван толгой
G_i	μ_i	0.105	0.092	0.057	0.149	0.114	0.332
	σ_i^2	0.539	0.339	0.034	0.566	0.108	0.653
C_i	ε_i	0.040	0.035	0.035	0.028	0.027	0.030
	γ_i	0.035	0.038	0.050	0.046	0.034	0.035

Эх сурвалж: Судлаачийн тооцоо

Эдгээр мэдээлэлд үндэслэн борлуулалтын төлөвлөлт хийх багц сонголтын бодлогыг дараах байдлаар бичиж болно. Загварын зааглалын утгуудыг $x_i = 1/6$, $i = 1, 2, \dots, 6$ болон 0.05 итгэх түвшний үед олбол $\mu_0 = 0.142$, $c_0 = 0.097$, $\sigma_0^2 = 0.062$ байна.

Зорилгын функц

$$\min_{x_i} \frac{\sum_{i=1}^6 x_i^2 \sigma_i^2}{\sum_{i=1}^6 x_i \mu_i},$$

Хязгаарлалтын нөхцөлүүд

$$0.105x_1 + 0.092x_2 + 0.057x_3 + 0.149x_4 + 0.114x_5 + 0.332x_6 \geq 0.142,$$

$$0.539x_1^2 + 0.339x_2^2 + 0.034x_3^2 + 0.566x_4^2 + 0.108x_5^2 + 0.653x_6^2 \leq 0.062,$$

$$\begin{aligned} & \left(0.04 + \frac{\sqrt{3} \cdot 0.035}{\pi} \ln \frac{0.95}{0.05}\right) x_1 + \left(0.035 + \frac{\sqrt{3} \cdot 0.038}{\pi} \ln \frac{0.95}{0.05}\right) x_2 + \\ & + \left(0.035 + \frac{\sqrt{3} \cdot 0.05}{\pi} \ln \frac{0.95}{0.05}\right) x_3 + \left(0.028 + \frac{\sqrt{3} \cdot 0.046}{\pi} \ln \frac{0.95}{0.05}\right) x_4 + \end{aligned}$$

$$+ \left(0.027 + \frac{\sqrt{3} \cdot 0.034}{\pi} \ln \frac{0.95}{0.05} \right) x_5 + \left(0.03 + \frac{\sqrt{3} \cdot 0.035}{\pi} \ln \frac{0.95}{0.05} \right) x_6 \leq 0.097,$$

Зааглалтын утгууд

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 1,$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0.$$

Энэхүү бодлогын Python дээр бичигдсэн кодыг Хавсралт А-д харуулав. Python дээр хийгдсэн тооцооллоор тус бодлогын оновчтой шийдүүд нь $x_1^* = 0.054, x_2^* = 0.068, x_3^* = 0.303, x_4^* = 0.089, x_5^* = 0.284, x_6^* = 0.202$ ба зорилгын функцийн утга 0.3253 гэж олдож байна. Эдгээр оновчтой утгуудын үр дүнд $\sigma_0^{2*} = 0.046$ болж хүлээгдэж буй эрсдэлийн түвшин 26 хувиар буурчээ.

IV. ДҮГНЭЛТ

Хувьцаанд хөрөнгө оруулахдаа нэг салбарт 50 хувиас ихгүй байхаар хөрөнгө оруулахыг зөвлөдөг. Энэхүү судалгааны ажлаар хувьцааны оновчтой багцыг хөрөнгө оруулалтын зардлыг Логистик тархалттай гэж үзэн нэгж өгөөжид ногдох эрсдэл минимум байх хөрөнгө оруулалтын стратегийн загвар ашиглан хийж болохыг харууллаа.

Бид судалгаанд Монголын хөрөнгийн биржийн топ 20 индекст багтаж буй АПУ, Говь, Махимпекс, Сүү, Талх чихэр, Таван толгой гэсэн 6 компанийн 2013-2024 оны тоон мэдээллийг ашигласан ба хөрөнгө оруулалтын багцын дундаж өгөөж 0.142-с багагүй, эрсдэлийн түвшин 0.062 болон Логистик тархалттай зардлын босго утга 0.097-с тус тус ихгүй гэсэн нөхцөлтэй тооцоолсон.

Тус бодлогын үр дүнд хөрөнгө оруулалтын оновчтой багц АПУ-5.4%, Говь-6.8%, Махимпекс-30.3%, Сүү-8.9%, Талх чихэр-28.4%, Таван толгой-20.2% байхаар тооцоологдлоо. Энэ багцын хувьд эрсдэлийн түвшин босго утгаас 26 хувиар буурч байна.

Ашигласан материал

- Ardia, D., Bolliger, G., Boudt, K., & Gagnon-Fleury, J. 2017. The Impact of Parameter Uncertainty on Portfolio Allocation: A Bayesian Approach. *Journal of Asset Management* 18(1): 1–13.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.M., & Heath, D. 1999. Coherent Measures of Risk. *Mathematical Finance* 9(3): 203–228.
- Banz, R. W. 1981. The Relationship Between Return and Market Value of Common Stocks. *Journal of Financial Economics* 9(1): 3–18.
- Black, F., & Litterman, R. 1992. Global Portfolio Optimization. *Financial Analysts Journal* 48(5): 28–43.
- Black, F., & Scholes, M. 1973. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy* 81(3): 637–654.
- Chen, L., Pelger, M., & Zhu, J. 2023. Deep Learning in Asset Pricing and Portfolio Selection. *Journal of Financial Economics* 147(1): 64–90.
- Chen, N., Roll, R., & Ross, S. A. 1986. Economic Forces and the Stock Market. *Journal of Business* 59(3): 383–403.
- De Nard, G., Ledoit, O., & Wolf, M. 2021. Factor Models for Portfolio Selection in Large Dimensions. *Journal of Financial Econometrics* 19(1): 1–32.
- DeMiguel, V., Nogales, F. J., & Uppal, R. 2010. A Generalized Approach to Portfolio Optimization: Improving Performance by Constraining Portfolio Norms. *Management Science* 56(4): 650–670.
- Engle, R.F. & Manganelli, S. 2004. CAViaR: Conditional Autoregressive Value at Risk. *Journal of Business & Economic Statistics* 22(4): 367–381.
- Fama, E. F. 1970. Efficient capital markets: A review of theory and empirical work. *Journal of Finance*, 25(2): 383–417.
- Fama, E. F., & French, K. R. 1992. The Cross-Section of Expected Stock Returns. *Journal of Finance* 47(2): 427–465.
- Feng, G., Giglio, S., & Xiu, D. 2020. Taming the Factor Zoo: A Test of New Factors. *Journal of Finance* 75(3): 1327–1370.
- Frost, P.A. & Savarino, J.E. 1986. An Empirical Bayes Approach to Portfolio Selection. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 21(3): 293–305.
- Hakansson, N. H. 1971. Capital Growth and the Mean-Variance Approach to Portfolio Selection.
- Harlow, W. V., & Rao, R. K. S. 1989. Asset Pricing in a Generalized Mean-Lower Partial Moment Framework. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 24(3): 285–311.
- Jorion, P. 1996. Measuring the Risk in Value at Risk. *Financial Analysts Journal* 52(6): 47–56.
- Journal of Financial and Quantitative Analysis* 6(1): 517–557.
- Konno, H., & Yamazaki, H. 1991. Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization

- Model. *Management Science* 37(5): 519–531.
- Kopp, E., Malczak, J., & Zastawniak, T. 2013. *Probability for finance*. Cambridge University Press.
- Ledoit, O., & Wolf, M. 2017. Nonlinear Shrinkage of the Covariance Matrix for Portfolio Selection: Markowitz Meets Goldilocks. *Review of Financial Studies* 30(12): 4349–4388.
- Ledoit, O., & Wolf, M. 2003. Improved estimation of the covariance matrix of stock returns with an application to portfolio selection. *Journal of Empirical Finance* 10(5): 603–621.
- Lintner, J. 1965. The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. *Review of Economics and Statistics*, 47(1): 13–37.
- Liu, B. 2007. *Uncertainty Theory*. 3. Ed., Springer Berlin Heidelberg.
- Markowitz, H. 1952. Portfolio selection. *Journal of Finance*, 7(1): 77–91.
- Markowitz, H.M., Todd, P., Xu, G., & Yamane, Y. 1993. Computation of Mean-Semivariance Efficient Sets. *Journal of Economics and Business* 45(2): 107–117.
- Mayers, D. 1972. Non-Marketable Assets and Capital Market Equilibrium Under Uncertainty. *Journal of Finance* 27(2): 517–557.
- Merton, R. C. 1971. Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model. *Journal of Economic Theory* 3(4): 373–413.
- Merton, R. C. 1973. An Intertemporal Capital Asset Pricing Model. *Econometrica* 41(5): 867–887.
- Mossin, J. 1966. Equilibrium in a capital asset market. *Econometrica*, 34(4): 768–783.
- Perold, A. F. 1984. Large-Scale Portfolio Optimization. *Management Science* 30(10): 1143–1160.
- Pflug, G. C. 1996. *Optimization of Stochastic Models: The Interface Between Simulation and Optimization*. Springer Book.
- Rockafellar, R.T. & Uryasev, S. 2000. Optimization of Conditional Value-at-Risk. *Journal of Risk* 2(3): 21–41.
- Ross, S. A. 1976. The arbitrage theory of capital asset pricing. *Journal of economic theory*, 13(3): 341–360.
- Sharpe, W. F. 1964. Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *Journal of Finance*, 19(3): 425–442.
- Wang, X., Zhang, N. 2025. Optimizing investment strategies for digital music copyrights under uncertainty. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 21(2): 1568–1583.
- Wang, Y., Li, Q., & Zhang, R. 2024. Large language models for asset allocation: GPT-4 as a portfolio man

ХАВСРАЛТ А. Python программын код

```
import numpy as np
from scipy.optimize import minimize
mu = np.array([0.105, 0.092, 0.057, 0.149, 0.114, 0.332])
sigma_squared = np.array([0.539, 0.339, 0.034, 0.566, 0.108, 0.653])
varepsilon = np.array([0.040, 0.035, 0.035, 0.028, 0.027, 0.030])
gamma = np.array([0.035, 0.038, 0.050, 0.046, 0.034, 0.035])
mu0 = 0.142
sigma0_squared = 0.062
c0 = 0.097
def objective(x):
    numerator = np.sum(x**2 * sigma_squared)
    denominator = np.sum(x * mu)
    return numerator / denominator
def constraint1(x):
    return np.sum(x * mu) - mu0 # Ensuring the constraint  $\sum(x * \mu) \geq \mu_0$ 
def constraint2(x):
    return np.sum(sigma_squared * x) - sigma0_squared
sum(sigma_squared * x) ≤ sigma0_squared
def constraint3(x):
    ln_term = np.log(0.95 / 0.05)
    term = (varepsilon + (np.sqrt(3) * gamma / np.pi) * ln_term)
    return np.sum(term * x) - c0 # The constraint for the sum of the terms involving x
def sum_constraint(x):
    return np.sum(x) - 1
bounds = [(0, None)] * 6
constraints = [
    {'type': 'ineq', 'fun': constraint1}, #  $\sum(x * \mu) \geq \mu_0$ 
    {'type': 'ineq', 'fun': constraint2}, #  $\sum(\sigma^2 * x) \leq \sigma_0^2$ 
    {'type': 'ineq', 'fun': constraint3}, #  $\sum(\text{term} * x) \leq c_0$ 
    {'type': 'eq', 'fun': sum_constraint}, #  $\sum(x) = 1$ 
]
x0 = np.array([1/6] * 6)
result = minimize(objective, x0, bounds=bounds, constraints=constraints)
if result.success:
    print("Optimized x values:", result.x)
    print("Minimum value of objective function:", result.fun) else:
    print("Optimization failed:", result.message)
Optimized x values: [0.05395646 0.0680284 0.30235395 0.08904284 0.28432519
0.20229316]
Minimum value of objective function: 0.3252610080779557
```