

SECOND ORDER CONE PROGRAMMING APPROACH FOR OPTIMAL REINSURANCE

B.Barsbold^I, D.Enkhtaivan^{II}, D.Batsuuri^{III}

Abstract: In this study, we propose an optimal retention for practical reinsurance problems via conditional tail expectation and variance-minimization models. We add an additional constraint, which expresses solvency of an insurance company, to the reinsurance optimization problems based on classical premium principles, namely expectation premium and standard deviation premium principle. Moreover, optimal solution of the reinsurance optimization problems in real claim data is solved by reformulating into equivalent second-order cone programming problems. We use CVXR package of R programming to solve the equivalent problems. Finally, we make some recommendations to apply in practice.

Keywords: Expectation premium principle, Standard deviation premium principle, Second-order cone programming, Conditional tail expectation, Solvency

ДАВХАР ДААТГАЛЫГ ОНОВЧЛОХ КОНУС ПРОГРАММЧЛАЛЫН АРГА

Хураангуй: Энэ судалгааны ажлаар нөхцөлт сүүлний дунджийг минимумчлах, дисперс минимумчлах загваруудаар даатгагчийн өөрт авч үлдэх эрсдлийн дээд хязгаарыг үнэлж, оновчтой шийдийг тооцоолох практик загваруудыг танилцуулна. Сонгодог хоёр төрлийн хураамж тооцоолох аргад суурилсан оптимизацийн бодлогод даатгагч зорилтот түвшинд төлбөрийн чадвараа хангахуйц байх нэмэлт зааглалт оруулсан. Тус загварыг хоёрдугаар эрэмбийн конус програмын бодлогод шилжүүлж бодит хохирлын тоон мэдээнд үндэслэн R програм ашиглан эмпирик судалгааг хийж, оновчтой шийдийг тооцон бодов. Мөн энэхүү загварыг практикт хэрэглэх санал, зөвлөмжийг тусгасан.

Түлхүүр үгс: Дундаж хураамжийн зарчим, Стандарт хазайлтын хураамжийн зарчим, Хоёрдугаар эрэмбийн конус програмчлал, Нөхцөлт сүүлний дундаж, Төлбөрийн чадвар

^I NUM, School of Information Technology and Electronics (E-mail): Barsbold@num.edu.mn

^{II} Actuary analytics LLC (E-mail): Do.enkhtaivan@gmail.com

^{III} University of the Humanities, Department of Finance and Economics (E-mail): Batsuuri@humanities.mn

Оршил

Даатгалын компани бизнес төлөвлөгөөгөө тодорхой зорилтот түвшинд биелүүлж, төлбөрийн чадварын шалгуур үзүүлэлтүүдийг хангахуйцаар эрсдэлүүдийг үнэлэн урт хугацаанд тогтвортой үйл ажиллагаа явуулах нь даатгалын салбарын нэн чухал асуудал юм. Даатгагчийн өөрийн эрсдэл болон төлбөрийн чадвараа үнэлэхтэй^{IV} холбоотойгоор түүнд тусгагдсан олон эрсдэлүүдээс даатгагчийн өөрт авч үлдэх гэрээний хариуцлагын дээд хэмжээг нарийвчлан судлах, математик загвараар үнэлэх шаардлагатай. Практикт даатгагчийн өөрийн хөрөнгийн хэмжээнээс хамаарч даатгалын гэрээ бүрийн хувьд ямар хэмжээний хохирлыг үүрэх боломжтойг тодорхойлох асуудал түгээмэл тулгардаг. Даатгалын компаниуд 2024 оны байдлаар нийт 498 тэрбум төгрөгийн хураамжийн орлого төвлөрүүлж, 165 тэрбум төгрөгийг гадаадын давхар даатгалд шилжүүлсэн (СЗХ, 2025) байна. Энэхүү судалгааны ажлын зорилго нь даатгагч төлбөрийн чадварыг хангахуйц байхаар өөрт авч үлдэх эрсдэлийн оновчтой шийдийн олонлогийг тооцоолж, давхар даатгалд шилжүүлэх хураамжийн хэмжээг бууруулах замаар гадагшлах валютын урсгалыг багасгах юм. Даатгагч нь давхар даатгалын програмаа сайжруулах, даатгалын гэрээний нөхцөл журмыг олон улсын жишигт нийцүүлэх, хам даатгал^V хийхийн хамт энэхүү судалгааны ажлыг зэрэгцүүлэн ашиглавал илүү үр дүнтэй.

Давхар даатгалын төлөвлөгөөний нийт эрсдэлийн дээд хязгаар болон даатгалын нэг гэрээгээр хүлээх эрсдэлийн дээд хэмжээг^{VI} тооцоолох, компанийн эрсдэлийн удирдлагын бодлогод ашиглах бүрэн боломжтой гэж судлаачдын зүгээс үзэж байна.

Судлагдсан байдал

Анх Карл Борчийн 1960 онд хийгдсэн оновчтой давхар даатгалын хэмжээг тодорхойлох судалгааны ажил маш олон актуарч болон эрдэм шинжилгээний ажилчдын анхаарлыг татаж эхэлсэн. Тус судалгааны үндсэн санаа нь давхар даатгалд шилжүүлэх хүлээгдэж буй эрсдэл өндөр байх тусам давхар даатгалын хураамжийн зардал өсөж, үүний эсрэгээр даатгагч өөртөө өндөр хэмжээний эрсдэлийг авч үлдвэл давхар даатгалын зардал буурах бөгөөд энэхүү хоёр зөрчилдөөнт зорилгуудын улмаас оновчтой давхар даатгалын хэмжээг тодорхойлох байсан.

Гажек, Загородни, Калуска нар (Ken Seng Tan, Chengguo Weng, 2014) стандарт хазайлт, дундаж-дисперсийн аргуудаар хураамжийг тодорхойлох замаар Карл Борчийн үр дүнг өргөтгөсөн.

Одоогийн байдлаар энэхүү чиглэлд олон эрдэм шинжилгээний өгүүлэл хэвлэгдэж, хэд хэдэн сонгодог төрлийн математик загвараар томьёолж тус асуудлыг шийдэх арга замыг тодорхойлсны дотроос Чай, Тан нарын цуврал (Jun Cai, Ken Seng Tan, 2009), (Ken Seng Tan, Chengguo Weng, 2014), (Ken Seng Tan, Chengguo Weng, Yi Zhang, 2012) ажлууд нь шинэлэг санаа, үр өгөөжтэй байдлыг агуулж байна гэж судлаачид

^{IV} Own risk and solvency assessment

^V Co insurance

^{VI} Санхүүгийн зохицуулах хорооны 2019 оны хоёрдугаар тогтоолоор баталсан “Даатгалын багц дүрэм”-ийн арвангуравдугаар хавсралт “Даатгагчийн давхар даатгалын төлөвлөгөөнд тавигдах шаардлага”-ын 2.2.1

үзжээ. Тус ажлуудын онцлог нь даатгагчийн нийт эрсдэлийг Var (value at risk), CTE (conditional tail expectation) аргуудаар үнэлж, тэдгээрийг минимумчлах замаар оновчтой давхар даатгалын загварыг томъёолж, дүн шинжилгээ хийсэн явдал юм. Мөн Марек Калушкагийн (Kaluszka, 2001) эрдэм шинжилгээний өгүүлэлд оновчтой давхар даатгалын хэмжээг тодорхойлохдоо даатгалын компанийн ханамжийн функцийг максимумчлах байдлаар загварчилжээ.

Хохирол бүрт харгалзах оновчтой давхар даатгалын хэмжээг тодорхойлох боломжтой, зааглалт нэмэхэд бодлогын шинж чанар өөрчлөгдөхгүй байх шаардлагатай байсан учраас энэхүү судалгааны аргазүйг сонгосон. Бид даатгалын компанид ноогдох хохирлын хэмжээ L тогтмолоос хэтрэхгүй байх зааглалтыг нэмж оруулснаар практик үр дүнг илүү өгөөжтэй болсон гэж үзэж байна.

Судалгааны арга зүй

А. Хоёрдугаар эрэмбийн конус программчлалын бодлого

Дараах хоёрдугаар эрэмбийн конус программчлалын бодлогын ерөнхий хэлбэрийг авч үзье.

$$\begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^N} c^T x \\ \text{s.t. } \|D_i x - d_i\| \leq p_i^T x - q_i, i = 1, 2, \dots, k, \end{cases} \quad (1)$$

Энд $c \in \mathbb{R}^N$, $D_i \in \mathbb{R}^{(n_i-1) \times n}$, $d_i \in \mathbb{R}^{n_i-1}$, $q_i \in \mathbb{R}$. Мөн зааглалтын норм нь $\|u\|_2 = (u^T u)^{1/2}$ байх Евклидын норм. $\|D_i x - d_i\| \leq p_i^T x - q_i$ нь n хэмжээстэй хоёрдугаар эрэмбийн конус зааглалт юм. Учир нь тус зааглалт нь доорх байдлаар тодорхойлогдсон n хэмжээстэй хоёрдугаар эрэмбийн (гүдгэр) конустай холбогддог.

$$\varepsilon_n = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ t \end{pmatrix} : u \in \mathbb{R}^{n-1}, t \in \mathbb{R}, \|u\| \leq t \right\} \quad (2)$$

Дээрх ε_n олонлогийг квадрат, зайрмаг^{VII} эсхүл Лоренцийн конус гэдэг. Хоёрдугаар эрэмбийн конус зааглалтын цэгүүдийн олонлог нь хоёрдугаар эрэмбийн конусын аффин буулгалтын урвуу дүр бөгөөд гүдгэр байна.

$$\|D_i x - d_i\| \leq p_i^T x - q_i \Leftrightarrow \begin{pmatrix} D_i \\ p_i^T \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} d_i \\ q_i \end{pmatrix} \in \varepsilon_{n_i} \quad (3)$$

Тиймээс (1) бодлогын зорилгын функц гүдгэр, зааглалтын олонлог нь гүдгэр учраас гүдгэр программчлалын бодлого юм. Хоёрдугаар эрэмбийн конус программчлалын бодлого нь шугаман программчлал, гүдгэр квадрат программчлал, квадратлаг

^{VII} Ice cream

зааглалттай гүдгэр квадрат программчлал зэргийг агуулдаг. Жишээлбэл: $p_i = 1, i = 1, 2, \dots, k$ үед шугаман программчлалын бодлого, $p_i = 0, q_i \geq 0$ үед зааглалт нь $\|D_i x - d_i\|^2 \leq q_i^2$ болж квадратлаг зааглалтай шугаман программчлалын бодлогод шилжинэ. Үүнээс гадна хоёрдугаар эрэмбийн конус программчлал нь шугаман бус гүдгэр программчлалын анги бөгөөд дотоод цэгийн арга ашиглан тооцон боддог.

В. Оновчтой давхар даатгал

Сөрөг биш, санамсаргүй хэмжигдэхүүн X -ээр даатгагчийн нийт хохирлын хэмжээг, $0 \leq f(X) \leq X$ байх $f(X)$ -ээр давхар даатгагчид ноогдох хохирлын хэмжээг тус тус тэмдэглэе. Тэгвэл давхар даатгагчийн хариуцах хэсгээс хамаарч даатгагчийн хохирлын хэмжээ $I_f(X) = X - f(X)$ болно. Давхар даатгагч авах хураамжийн хэмжээгээ өгөгдсөн Π функцээр тооцоолдог гэж үзвэл тус хураамж нь $\Pi(f(X))$ байна. Даатгагчийн хувьд нийт хохирлын хэмжээг давхар даатгагчаас хамааралтай байдлаар $T_f := I_f(X) + \Pi(f(X))$ гэж тодорхойлж болно. Эндээс оновчтой давхар даатгалыг дараах байдлаар загварчилж болно:

$$\begin{cases} \min_f \rho(T_f(X)) \\ \text{s. t. } \Pi(f(X)) \leq \pi \\ 0 \leq f(X) \leq X \end{cases} \quad (4)$$

Энд ρ нь даатгагчийн нийт хохирлын функцийг эрсдэлийн хэмжээсээр үнэлэх загвар, π нь давхар даатгалд төлөх хураамжийн хэмжээ бөгөөд (4) бодлого нь даатгагчийн давхар даатгалын зардал π -ээс хэтрэхгүй, нийт хохирлын функцийг эрсдэлийн хэмжээсээр үнэлсэн үнэлгээ минимум байхаар оновчтой давхар даатгалын хэмжээ $f(X)$ -г олох юм.

Бид энэхүү судалгааны ажлаар ρ -г дисперс минимумчлах (Var-Min), нөхцөлт сүүлийн дунджийг минимумчлах (STE-Min) загваруудаар, Π -г дундаж хураамжийн зарчим (Expectation principle), стандарт хазайлтын хураамжийн зарчмуудаар (Standard deviation principle) тус тус сонгосон. Давхар даатгалын хураамжийн зардлыг бусад хураамж тооцоолох сонгодог зарчмуудаар сольж бодлогын тавилд нийцүүлэх замаар практик үр дүнг харьцуулах боломжтой юм.

Дээрх (4) бодлогод (Ken Seng Tan, Chengguo Weng, 2014) бид

$$\sum_{i=1}^N (x_i - f(x_i)) = L \Leftrightarrow \sum_{i=1}^N f(x_i) \geq \sum_{i=1}^N x_i - L \quad (5)$$

зааглалтыг нэмж өргөтгөн практик үр дүнг илүү өгөөжтэй байхаар загварчилсан. Өөрөөр хэлбэл даатгагчийн хариуцах хохирлын нийт хэмжээ тодорхой $L \in \mathbb{R}_+$ тогтмолоос хэтрэхгүй байх нөхцөлийг нэмсэн. Эндээс бодлогын ерөнхий тавил дараах хэлбэртэй болно:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_f \rho(T_f(X)) \\ \text{s. t. } \Pi(f(X)) \leq \pi \\ 0 \leq f(X) \leq X \\ \sum_{i=1}^N f(x_i) \geq \sum_{i=1}^N x_i - L \end{array} \right. \quad (6)$$

Энд: $X^T := (x_1, x_2, \dots, x_N)$. Энэхүү зааглалтыг нэмснээр практик хэрэглээнд даатгалын компани L тогтмолыг нийт өр төлбөрийн дүнгээр сонгон авч төлбөрийн чадварыг зорилтот түвшинд хангахаар давхар даатгалд даатгуулах хэрэгцээгээ тодорхойлж эрсдэлээ удирдах боломжтой болно.

С. Давхар даатгалын практик загварууд

Даатгагчийн i -р хохирол x_i байх N ширхэг бодит хохирлын (нэхэмжлэл) дүнг $x^t := (x_1, x_2, \dots, x_N)$ гэж тэмдэглэе. Энэхүү X түүвэр өгөгдлийг ашиглан ирээдүйн хохирлын хэмжээг тодорхойлох замаар оновчтой давхар даатгалын стратегийг боловсруулна. x_i хохирол бүрийн харгалзах давхар даатгалын хамгаалалт f_i -ийг $f := (f_1, f_2, \dots, f_N)$ боломжит шийдвэрийн вектор гэж үзье. Тэгвэл давхар даатгалын практик загварыг (6) бодлогоос дараах байдлаар томъёолж болно:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_f \rho(\widehat{x}, f) \\ \text{s. t. } 0 \leq f_i \leq x_i, i = \overline{1, N} \\ \overline{\Pi(f)} \leq \pi \\ \sum_{i=1}^N f(x_i) \geq \sum_{i=1}^N x_i - L \end{array} \right. \quad (7)$$

Дээрх $\rho(\widehat{x}, f)$ ба $\overline{\Pi(f)}$ нь харгалзан (6) бодлогын $\rho(X, f)$ ба $\Pi(f(X))$ -ийг тус тус практикт үнэлсэн үнэлгээ бөгөөд $\rho(\widehat{x}, f)$ нь X ба f -ээс, $\overline{\Pi(f)}$ нь шийдвэрийн вектор f -ээс хамаарна. Загварын дагуу хэрэглээнд тооцоолол хийхдээ хохирлын түүхэн мэдээлэлд инфляцийн тохируулга хийж ашиглах нь илүү тохиромжтой. Энэхүү давхар даатгалын N хэмжээст оптимизацийн бодлогын оновчтой шийдийн олонлогийг $f^* := (f_1^*, \dots, f_N^*)^T$ гэж тэмдэглээд, судалгааны хэсэгт тооцооллын үр дүнг бид $\{(x_i, f_i^*), i = \overline{1, N}\}$ төгсгөлөг цэгийн олонлогийг графикаар харуулна. Судалгааны дараах хэсэгт бид оновчтой давхар даатгалын дисперс минимумчлах болон нөхцөлт сүүлний дунджийг минимумчлах загваруудыг авч үзнэ.

Д. Дисперс минимумчлах (Var-Min) загвар

Даатгагчийн нийт хохирлын функцийг эрсдэлийн хэмжээсээр үнэлэхдээ дисперсээр сонговол (6) бодлого дараах байдлаар загварчлагдана:

$$\begin{cases} \min_f \text{Var}(I_f) = \text{Var}(X - f(x)) \\ \text{s. t. } \Pi(f(X)) \leq \pi \\ 0 \leq f(X) \leq X \\ \sum_{i=1}^N f(x_i) \geq \sum_{i=1}^N x_i - L \end{cases} \quad (8)$$

Энд дисперсийг Var -аар тэмдэглэв. Өгөгдсөн x, f -ийн хувьд $\text{Var}(X - f(x))$ зорилгын функцийг практикт дараах байдлаар үнэлэх боломжтой.

$$\begin{aligned} \widehat{\text{Var}(I_f)} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [(x_i - f_i) - (\bar{x} - \bar{f})]^2 \\ &= \frac{1}{N} (x - f)^T Q (x - f) \\ &= \frac{1}{N} [f^T Q f - 2x^T Q f + x^T Q x] \end{aligned} \quad (9)$$

Энд $\bar{x}$ ба $\bar{f}$ нь харгалзан x түүвэр өгөгдөл болон f шийдвэрийн векторын дундаж бөгөөд Q матрицыг дараах байдлаар тодорхойлоо:

$$Q = \begin{pmatrix} q_1^T \\ \vdots \\ q_N^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{N} & -\frac{1}{N} & \dots & -\frac{1}{N} \\ -\frac{1}{N} & 1 - \frac{1}{N} & \dots & -\frac{1}{N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{N} & -\frac{1}{N} & \dots & 1 - \frac{1}{N} \end{pmatrix}$$

Энд q_k нь k -р компонент нь $1 - \frac{1}{N}$ -тэй тэнцүү, бусад компонент нь $-\frac{1}{N}$ тэнцүү байх N хэмжээст багана вектор.

Мөн $0 \leq f(x) \leq x$ зааглалт нь тухайн тохиолдолд $0 \leq f_i \leq x_i$, $i = \overline{1, N}$ байх бөгөөд $\Pi(f) \leq \pi$ нөхцөлийг хангах давхар даатгалын хураамжийн зааглалтыг практикт үнэлсэн үнэлгээ $\overline{\Pi(f)} \leq \pi$ байна. Эндээс дисперс минимумчлах давхар даатгалын практик загварыг дараах байдлаар томъёолж болно:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{f \in \mathbb{R}^N} f^T Q f - 2x^T Q f \\ \text{s. t. } 0 \leq f_i \leq x_i, i = \overline{1, N} \\ \widehat{\Pi(f)} \leq \pi \\ \sum_{i=1}^N f(x_i) \geq \sum_{i=1}^N x_i - L \end{array} \right. \quad (10)$$

Е. Дундаж хураамжийн зарчим

Давхар даатгалын хураамжийн зардлыг $\Pi(Z) = (1 + \theta)E[Z]$ байх дундаж хураамжийн зарчмаар тооцоолдог гэж үзье.

$$\widehat{\Pi(f)} \leq \pi \Leftrightarrow (1 + \theta)\bar{f} \leq \pi \Leftrightarrow e^T f \leq \frac{1+\theta}{N} \pi$$

Тэгвэл $\theta > 0$ байх энэхүү шугаман зааглалтаас дисперс минимумчлах практик загвар нь гүдгэр квадратлаг програмчлалын хоёрдугаар эрэмбийн конус программчлал (SOCP^{VIII}) бодлогод шилжих бөгөөд тус зааглалтыг $(1 + \theta)\bar{f} = \pi$ байх тэнцэтгэл зааглалтаар соливол бодлого дараах байдлаар томьёологдоно:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{f \in \mathbb{R}^N} f^T Q f - 2x^T Q f \\ \text{s. t. } 0 \leq f_i \leq x_i, i = \overline{1, N} \\ (1 + \theta) \frac{1}{N} e^T f = \pi \\ \sum_{i=1}^N f(x_i) \geq \sum_{i=1}^N x_i - L \end{array} \right. \quad (11)$$

Энд e нь бүх компонент нь нэгтэй тэнцүү N хэмжээст багана вектор, θ нь давхар даатгагчийн харьцангуй ачааллын коэффициент.

Ү. Стандарт хазайлтын хураамжийн зарчим

Давхар даатгалын хураамжийн зардлыг $\Pi(Z) = E[Z] + \beta\sqrt{\text{Var}[Z]}$ байх стандарт хазайлтын хураамжийн зарчмаар тооцоолдог гэж үзье.

$$\widehat{\Pi(f)} \leq \pi \Leftrightarrow \bar{f} + \beta \frac{\|Qf\|}{\sqrt{N}} \leq \pi \Leftrightarrow \|Qf\| \leq -\frac{1}{\beta\sqrt{N}} e^T f + \frac{\sqrt{N}}{\beta} \pi$$

^{VIII} Second-order conic programming

Тэгвэл $\beta > 0$ байх дисперс минимумчлах практик загвар нь гүдгэр квадратлаг програмчлалын хоёрдугаар эрэмбийн конус програмчлал бодлогод мөн шилжих бөгөөд бодлого дараах байдлаар томъёологдоно:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{f \in \mathbb{R}^N} f^T Q f - 2x^T Q f \\ \text{s. t. } 0 \leq f_i \leq x_i, i = \overline{1, N} \\ \|Qf\|_2 \leq -\frac{1}{\beta\sqrt{N}} e^T f + \frac{\sqrt{N}}{\beta} \pi \\ \sum_{i=1}^N f(x_i) \geq \sum_{i=1}^N x_i - L \end{array} \right. \quad (12)$$

Энд $\|\cdot\|_2$ нь $\|u\|_2 = (u^T u)^{1/2}$ байх Евклидын норм, β нь давхар даатгагчийн харьцангуй ачааллын коэффициент.

Г. *Нөхцөлт сүцлний дунджийг минимумчлах (CTE-Min) загвар*

Тодорхойлолт.1 $1 - \alpha$, $0 < \alpha < 1$, итгэх түвшинд хохирлын Z санамсаргүй хэмжигдэхүүний VaR^{IX} нь $\text{VaR}_\alpha(Z) = \inf\{z \in \mathbb{R} : \Pr(Z \leq z) \geq 1 - \alpha\}$ байна.

Тодорхойлолт.2 $1 - \alpha$, $0 < \alpha < 1$, итгэх түвшинд хохирлын Z санамсаргүй хэмжигдэхүүний CTE^{X} нь VaR -ийн дундаж $\text{CTE}_\alpha(Z) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \text{Var}_q(Z) dq$ байна.

Эрсдэлийн хэмжээсийг CTE загвараар үнэлбэл (6) бодлого нь дараах бодлого руу шилжинэ:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_f \{\text{CTE}_\alpha(T_f) = \text{CTE}_\alpha(X - f(X) + \Pi[f(X)])\} \\ \text{s. t. } 0 \leq f(X) \leq X \\ \Pi[f(X)] \leq \pi \\ \sum_{i=1}^N f(x_i) \geq \sum_{i=1}^N x_i - L \end{array} \right. \quad (13)$$

(13) бодлогын f^* шийдийг олох нь (14) бодлогын (ξ^*, f^*) шийдүүдийг олохтой тэнцүү чанартай учраас дээрх 2 бодлого нь эквивалент юм.

^{IX} Value at risk

^X Conditional tail expectation

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{(\xi, f)} \left\{ G_{\alpha}(\xi, f) := \xi + \frac{1}{\alpha} E[(X - f(x) + \Pi(f(X)) - \xi)_+] \right\} \\ \text{s. t. } \quad 0 \leq f(X) \leq X \\ \quad \quad \Pi[f(X)] \leq \pi \\ \quad \quad \sum_{i=1}^N f(x_i) \geq \sum_{i=1}^N x_i - L \end{array} \right. \quad (14)$$

Математик дунжийг түүврийн дунджаар солих замаар нөхцөлт сүүлний дунжийг минимумчлах бодлого нь давхар даатгалын практик загварт дараах хэлбэртэй тавигдана:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{(\xi, f)} G_{\alpha}(\widehat{\xi}, f) = \xi + \frac{1}{\alpha N} \sum_{i=1}^N [(x_i - f_i + \widehat{\Pi}(f) - \xi)_+] \\ \text{s. t. } \quad 0 \leq f_i \leq x_i, i = \overline{1, N} \\ \quad \quad \widehat{\Pi}(f) \leq \pi \\ \quad \quad \sum_{i=1}^N f(x_i) \geq \sum_{i=1}^N x_i - L \end{array} \right. \quad (15)$$

Нэмэлт шийдвэрийн вектор $z = (z_1, \dots, z_N)^T$ хувьсагчийг оруулж ирснээр (15) бодлогын хувьд (ξ^*, f^*) олох ба (16) бодлогын хувьд (ξ^*, f^*, z^*) тооцоолох нь адил учраас энэхүү 2 бодлого нь эквивалент юм.

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{(\xi, f, z)} \xi + \frac{1}{\alpha N} \sum_{i=1}^N z_i \\ \text{s. t. } \quad 0 \leq f_i \leq x_i, i = \overline{1, N} \\ \quad \quad z_i \geq 0, z_i \geq x_i - f_i + \widehat{\Pi}(f) - \xi, i = \overline{1, N} \\ \quad \quad \widehat{\Pi}(f) \leq \pi \\ \quad \quad \sum_{i=1}^N f(x_i) \geq \sum_{i=1}^N x_i - L \end{array} \right. \quad (16)$$

Өмнө томъёолсноор (16)-ийг дундаж хураамжийн зарчмаар практик хэрэглээнд загварчилбал бодлого дараах хэлбэртэй болно:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{(\xi, f, z)} \xi + \frac{1}{\alpha N} \sum_{i=1}^N z_i \\ \text{s. t. } 0 \leq f_i \leq x_i, i = \overline{1, N} \\ z_i \geq 0, z_i \geq x_i - f_i + (1 + \theta)\bar{f} - \xi, i = \overline{1, N} \\ \bar{f} \leq \pi/(1 + \theta) \\ \sum_{i=1}^N f(x_i) \geq \sum_{i=1}^N x_i - L \end{array} \right. \quad (17)$$

Мөн (16)-ийг стандарт хазайлтын хураамжийн зарчмаар практикт загварчилбал бодлого дараах хэлбэртэй тавигдана:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{(\xi, f, z)} \xi + \frac{1}{\alpha N} \sum_{i=1}^N z_i \\ \text{s. t. } 0 \leq f_i \leq x_i, i = \overline{1, N} \\ z_i \geq 0, i = \overline{1, N} \\ \|Qf\|_2 \leq -\frac{1}{\beta\sqrt{N}} e^T f + \frac{\sqrt{N}}{\beta} \pi \\ \|Qf\|_2 \leq -\frac{1}{\beta\sqrt{N}} e^T f + \frac{\sqrt{N}}{\beta} (f_i + \xi + z_i - x_i), i = \overline{1, N} \\ \sum_{i=1}^N f(x_i) \geq \sum_{i=1}^N x_i - L \end{array} \right. \quad (18)$$

Судалгааны ажлын давхар даатгалын дизайныг оновчлох бодлогыг хоёрдугаар эрэмбийн конус программчлалын эквивалент дэд бодлого руу шилжүүлэн R программчлалын CVXR багцын тусламжтайгаар бодно.

Судалгааны хэсэг

Миг даатгал компанийн 2018 оны нэг жилийн бодит нэхэмжлэлийн мэдээллийг ашиглан даатгагчийн өөрт авч үлдэх эрсдэлийн дээд хязгаарыг дисперс минимумчлах, нөхцөлт сүүлний дунджийг минимумчлах практик загваруудаар үнэллээ. Давхар даатгалын хураамжийн зардлыг дундаж хураамжийн зарчим, стандарт хазайлтын хураамжийн зарчмын дагуу тооцоолох тохиолдлуудад загвар тус бүрийн хувьд үнэлгээг хийлээ. Өөрөөр хэлбэл (11), (12), (17), (18) загваруудаар тодорхойлогдсон оптимизацийн бодлогуудыг бодож, үр дүнг харьцуулан дүн шинжилгээ хийсэн.

Н. Өгөгдлийн боловсруулалт

Даатгалын нэхэмжлэлийн (8156×4) хэмжээс бүхий түүхий өгөгдөлд дараах үе шаттайгаар боловсруулалт хийлээ.

- Иргэдийн даатгалын бүтээгдэхүүний гэрээтэй холбогдох нэхэмжлэлийн мэдээг хассан. Учир нь онцлох цөөн хэдэн төрлийн гэрээс бусад тохиолдолд иргэдийн зах зээл дахь даатгалын эрсдэлийг хураамжийн хэмжээгээр бүрэн удирдах боломжтой юм. Хохирлын давтамж нэмэгдэж мөнгөн урсгалын хувьд нөхөн төлбөрийн нөөц сан нэмэгдсэн тохиолдолд хохирлын харьцааг тодорхой түвшинд бууруулж, зардлаа танах замаар активын хэмжээг^{XI} нэмэгдүүлж төлбөрийн чадварын эрсдэлээ удирдаж чадна гэж үзлээ.
- Бидний гол анхаарч үзэх ёстой өгөгдөл нь өндөр үнэлгээ бүхий гэрээнээс нэг удаагийн даатгалын тохиолдлоор их хэмжээний нөхөн төлбөр олгож болзошгүй, даатгагчийн төлбөрийн чадварт гэнэтийн сөрөг нөлөө үзүүлэх эрсдэл дагуулсан нэхэмжлэлүүд юм. Иймд 20 хүртэл сая төгрөгийн давтамжтай нэхэмжлэлийг даатгагчийн актив даах боломжтой гэж үзээд харгалзах мэдээллийг хасав.

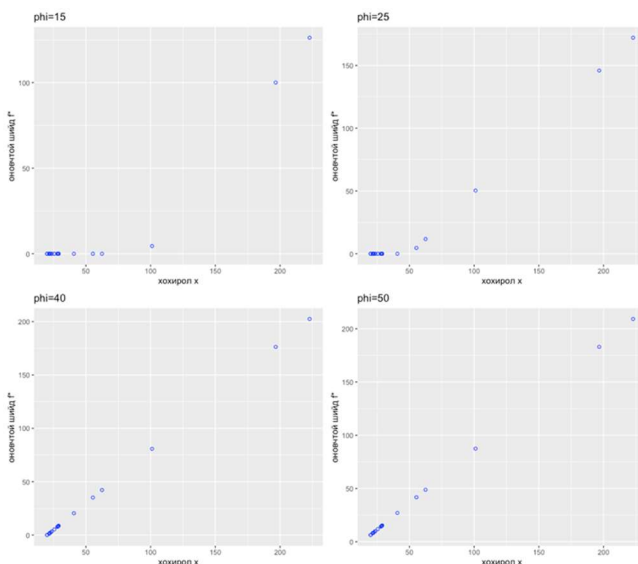
И. Судалгааны цр дүн

Дистперс минимумчлах загварын дагуу, дундаж хураамжийн зарчмаар $\theta = 0.3$, $L = 800$ үед $\pi = 15, 25, 40, 50$ байх тохиолдлуудад тооцоолсон үр дүнг Зураг 1-т харууллаа. Оновчтой шийдүүдийг $\{(x_i, f_i^*), i = \overline{1, N}\}$ байдлаар дүрслэв.

Зураг 1-т дүрсэлснээр давхар даатгалын хураамжийн зардал 15 сая тохиолдолд ойролцоогоор 100 сая хүртэлх хохирлыг даатгалын компани өөрөө хариуцаж түүнээс давсан хэсгийг давхар даатгалд даатгуулах шаардлагатай гэсэн үр дүн гарсан бол

^{XI} Зөвшөөрөгдөх хөрөнгийн хэмжээ

Зураг 1. Var-Min зорилгын функцтэй, дундаж хураамжийн зарчим бүхий зааглалттай загварын эмпирик үр дүн, сая.төг



Эх сурвалж: Судлаачдын тооцоо

$\pi = 25$ үед 50 саяас дээш хохирлуудын тодорхой хэсгүүдийг давхар даатгалд шилжүүлэх нь зүйтэй гэсэн оновчтой хариу өгч байна. Харин давхар даатгалын хураамжийн зардал 40 ба 50 сая үед даатгалын компани 10 саяас дээш бүх хохирлын ихэнх хэсгийг шилжүүлэх боломжтой байна.

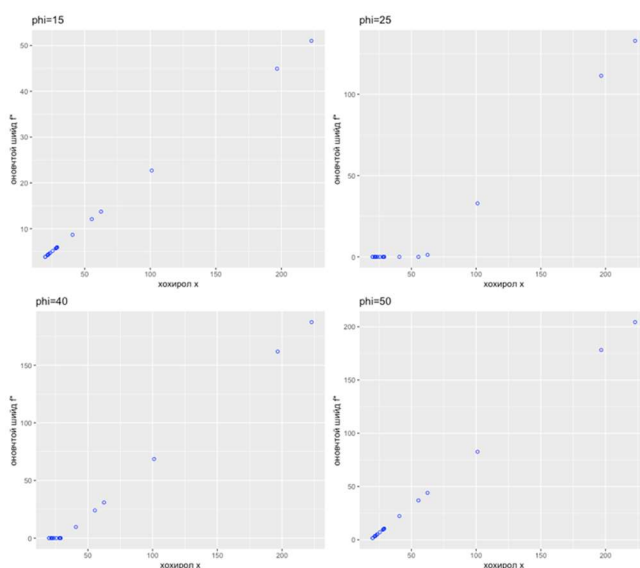
Дисперс минимумчлах загварын дагуу, стандарт хазайлтын хураамжийн зарчмаар $\theta = 0.3$, $L = 800$ үед $\pi = 15, 25, 40, 50$ байх тохиолдлуудад тооцоолсон үр дүнг Зураг 2-т харууллаа. Оновчтой шийдүүдийг $\{(x_i, f_i^*), i = \overline{1, N}\}$ байдлаар дүрслэв.

Зураг 2-т дүрсэлснээр давхар даатгалын хураамжийн зардал 15 сая тохиолдолд хохирол бүрийн бага хэсгийг жигд байдлаар давхар даатгалд даатгуулах шаардлагатай гэсэн үр дүн гарсан бол $\pi = 25, 50$ сая тохиолдлуудад харгалзан 60 ба 25 саяас дээш хохирлуудын тодорхой хэсгүүдийг давхар даатгалд шилжүүлэх нь зүйтэй гэсэн оновчтой хариу өгч байна. Харин давхар даатгалын хураамжийн зардал 50 сая үед даатгалын компани 10 саяас дээш бүх хохирлын ихэнх хэсгийг шилжүүлэх боломжтой байна.

Нөхцөлт сүүлний дунжийг минимумчлах загварын дагуу, дундаж хураамжийн зарчмаар $\theta = 0.3$, $L = 800$ үед $\pi = 15, 25, 40, 50$ байх тохиолдлуудад тооцоолсон үр дүнг Зураг 3-т харууллаа. Оновчтой шийдүүдийг $\{(x_i, f_i^*), i = \overline{1, N}\}$ байдлаар дүрслэв.

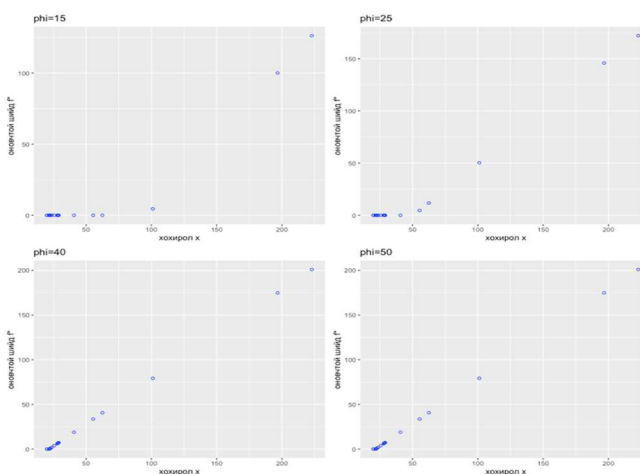
Зураг 3-т дүрсэлснээр давхар даатгалын хураамжийн зардал 15 сая тохиолдолд ойролцоогоор 100 сая хүртэлх хохирлыг даатгалын компани өөрөө хариуцаж, $\pi = 25$ үед 55 саяас дээш хохирлуудын тодорхой хэсгүүдийг давхар даатгалд шилжүүлэх шаардлагатай гэсэн үр дүн гарсан.

Зураг 2. Var-Min зорилгын функцтэй, стандарт хазайлтын хураамжийн зарчим бүхий зааглалттай загварын эмпирик үр дүн, сая.төг



Эх сурвалж: Судлаачдын тооцоо

Зураг 3. STE-Min зорилгын функцтэй, дундаж хураамжийн зарчим бүхий зааглалттай загварын эмпирик үр дүн, сая.төг



Эх сурвалж: Судлаачдын тооцоо

Харин давхар даатгалын хураамжийн зардал 40 ба 50 сая үед даатгалын компани ойролцоогоор 10 саяас дээш бүх хохирлын ихэнх хэсгийг шилжүүлэх боломжтой байна. Өөрөөр хэлбэл Var-Min зорилгын функцтэй, дундаж хураамжийн зарчмаар илэрхийлэгдэх зааглалттай загвартай ойролцоо үр дүн гарсан.

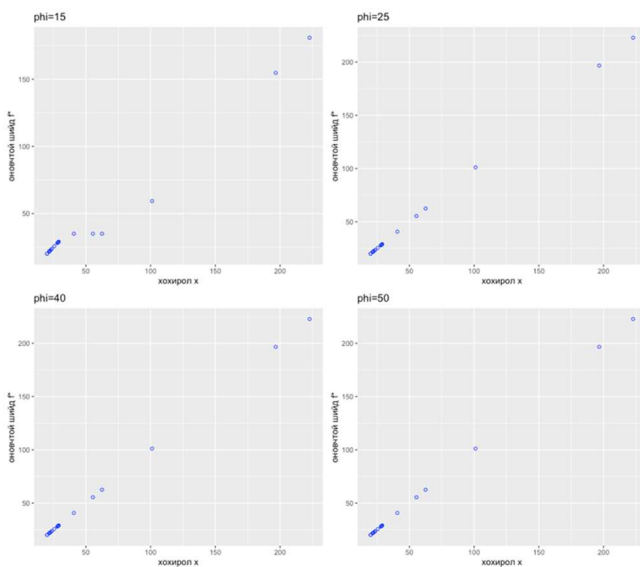
Нөхцөлт сүүлний дунжийг минимумчлах загварын дагуу, стандарт хазайлтын хураамжийн зарчмаар $\theta = 0.3$, $L = 800$ үед $\pi = 15, 25, 40, 50$ байх тохиолдлуудад тооцоолсон үр дүн

Эх сурвалж: Судлаачдын тооцоо

Зураг 3-т харуулаа. Оновчтой шийдүүдийг $\{(x_i, f_i^*), i = \overline{1, N}\}$ байдлаар дүрслэв.

Зураг 4-т дүрсэлснээр давхар даатгалын хураамжийн зардал 15 сая тохиолдолд ойролцоогоор 40 сая хүртэлх хохирлыг давхар даатгалд шилжүүлж, 70 сая хүртэлх хохирлын 35 саяыг давхар даатгалд хамруулж, 70 саяас дээш хохирол бүрийн тодорхой хэсгийг давхар даатгалд даатгуулах нь оновчтой гэсэн үр дүн гарлаа. Давхар даатгалын хураамжийн зардал 25, 40, 50 сая байх үед даатгалын компани ойролцоогоор 10 саяас дээш бүх хохирлын ихэнх хэсгийг шилжүүлэх боломжтой байна. Энэхүү эмпирик судалгаагаар STE-Min загварын стандарт хазайлтын хураамжийн зарчмаар илэрхийлэгдэх зааглалттай тохиолдолд давхар даатгалын компани бусад загваруудтай харьцуулахад хамгийн бага үнийн санал ирүүлэх магадлалтай байна.

Зураг 4. STE-Min зорилгын функцтэй, стандарт хазайлтын хураамжийн зарчим бүхий зааглалттай загварын эмпирик үр дүн, сая.төг



Эх сурвалж: Судлаачдын тооцоо

Хүснэгт 1. Загваруудын үр дүн, сая.төг

Дисперс минимумчлах загвар						Нөхцөлт сүүлний дунджийг минимумчлах загвар					
Дундаж хураамжийн зарчим			Стандарт хазайлтын хураамжийн зарчим			Дундаж хураамжийн зарчим			Стандарт хазайлтын хураамжийн зарчим		
п	$\bar{x} - f^*$	$\max(f^*)$	п	$\bar{x} - f^*$	$\max(f^*)$	п	$\bar{x} - f^*$	$\max(f^*)$	п	$\bar{x} - f^*$	$\max(f^*)$
15	39.53	126.22	15	40	51	15	39.53	126.22	15	8.97	180.96
25	31.84	172.05	25	37.15	132.88	25	31.84	172.05	25	8.26	222.87
40	20.29	202.49	40	26.94	187.36	40	21.63	200.99	40	0	222.87
50	13.65	209.19	50	18.5	204.37	50	21.63	200.99	50	0	222.87

Эх сурвалж: Судлаачдын тооцоо

Давхар даатгалын хураамжийн зардал өсөхөд загвар тус бүрийн хувьд тооцоолсон оновчтой шийдүүдээс хамаарч даатгагчийн хариуцах дундаж нөхөн төлбөр буурч, давхар даатгагчийн хариуцах хамгийн их хохирлын хэмжээ өсөж байна. Өөрөөр хэлбэл даатгалын компани бизнес төлөвлөгөөнд тусгасан давхар даатгалын хураамжийн зардал ба өр төлбөр зорилтот төвшнөөс хэтрэхгүй байхаар даатгалын эрсдэлийг удирдах боломжтойг харууллаа.

Дүгнэлт

Оновчтой давхар даатгалыг тодорхойлоход хохирлын тархалт, түүний сүүлийг онцлон судлах зайлшгүй шаардлагатай байдаг. Практикт хохирлын тархалтын функц ихэвчлэн урт сүүлтэй байдаг бөгөөд энэ чиглэлд судалгаа хийдэг бусад судлаачдын эрдэм шинжилгээний өгүүлүүдэд дурьдсанаар нөхцөлт сүүлний дунджийг минимумчлах загвар энэ тохиолдолд сайн үр дүнтэй байсаныг онцлох нь зүйтэй юм. Тухайлбал илтгэгч тархалт, паретогийн тархалттай үед нарийвчилсан судалгааг хийжээ.

Эмпирик судалгааны ажлаар цөөн тооны өгөгдөл ашиглан тооцоолол хийхэд давхар даатгалын хураамжийн хэмжээ өөрчлөгдөх бүрт загварууд ялгаатай, оновчтой шийдүүд өгч байгаа нь загваруудыг бага хэмжээний хохирлын мэдээлэлд ч ашиглах боломжтойг харуулж байна.

Давхар даатгалыг оновчлох конус программчлалын энэхүү арга нь давхар даатгалын хохирлын функцийг даатгагчийн өөрт авч үлдэх эрсдэлийн дээд хязгаараас хамааруулан тодорхойлж байгаа тул давхар даатгалын аль ч төрлийн хэлцэл хийхэд ашиглаж болно. Мөн давхар даатгагчийн ирүүлсэн үнийн саналыг бодитой эсэхэд шинжилгээ хийх боломж бүрдэхээс гадна нэмэлт зааглалт оруулснаар төлбөрийн чадварыг зорилтот түвшинд хангахаар нийт гэрээгээр хүлээх эрсдэлийн хэмжээг тодорхойлж болно.

Практикт хохирлын бодит өгөгдлийг нэхэмжилсэн дүнгээр сонгож, инфляцийн тохируулга хийвэл тохиромжтой. Жишээлбэл, мэдсэн боловч төлөөгүй хохирлын

нөөц санг^{XII} нэхэмжилсэн хохирлын дүнгээр байгуулж, тус нөөц сан нь даатгалын компанийн өр төлбөрөөр бүртгэгдэн төлбөрийн чадварт шууд нөлөө үзүүлнэ. Ө-г давхар даатгагчийн хохирлын харьцааг эсхүл хохирол нөхөлтийн харьцааг тооцож сонгох шаардлагатай.

L-г тодорхойлоходоо ямар хэмжээний өр төлбөрийг тухайн даатгалын компани санхүүгийн чадавхийн хувьд даах боломжтойг судалж, дүн шинжилгээ хийх хэрэгтэй. Хэрэв бүтээгдэхүүн бүрийн хувьд L-г олох боломжгүй бол нөхөн төлбөрийн эзлэх хувийн жинг ашиглан тооцсоны дараа учирсан боловч мэдэгдээгүй хохирлын нөөц санг нэмэх нь зүйтэй. Энэхүү параметруудээс гадна давхар даатгалын ямар хэлцлийн хувьд тооцоолол хийхээс шалтгаалж даатгалын бүтээгдэхүүн эсхүл хэлбэрээр хохирлыг ангилж өгөгдлийн боловсруулалт хийх нь чухал гэж үзлээ.

Цаашид бусад хураамж бодох сонгодог аргуудын тусламжтай загварчлах, практикт үр өгөөжтэй зааглалтуудаар өргөтгөх, даатгалын үнэлгээг загварт нэмж оруулах, тухайн загварт тохирох оптимизацийн аргуудыг судлах хэрэгтэй.

Ашигласан материал

- Michael Grant, Stephen Boyd, Yinyu Ye. (2006). Disciplined Convex Optimization. Global optimization: from theory to implementation, 155-210.
- Rob Kaas, Marc Goovaerts, Jan Dhaene, Michel Denuit. (2009). Modern Actuarial Risk Theory: Using R. Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Miguel Sousa Lobo, Lieven Vandenbergh, Stephen Boyd, Herve Lebrete. (1998). Applications of second-order cone programming. Linear Algebra and its Applications 284, 193-228.
- Anqi Fu, Balasubramanian Narasimhan, Stephen Boyd. (2017). CVXR: An R Package for Disciplined Convex Optimization. arXiv: 1711.07582.
- Ken Seng Tan, Chengguo Weng. (2014). Empirical Approach for Optimal Reinsurance Design. North American Actuarial Journal, 315-342.
- Bowers, N.J., Gerber, H.U., Hickman, J.C., Jones, D.A. and Nesbitt, C.J. (1997). Actuarial Mathematics. Schaumburg: The Society of Actuaries.
- Jun Cai, Ken Seng Tan. (2009). Optimal Retention for a Stop-Loss Reinsurance.
- Ken Seng Tan, Chengguo Weng, Yi Zhang. (2012). VAR and CTE Criteria for Optimal Quota-Share and. North American Actuarial Journal, 459-482.
- Kaluszka, M. (2001). Optimal reinsurance under mean-variance premium principles. Insurance: Mathematics and Economics 28, 61-67.
- Р.Энхбат. (2018). Оптимизаци 5. Улаанбаатар хот.
- C.M.Dickson, D. (2005). Insurance risk and ruin. Cambridge: Cambridge University Press.
- СЗХ. (2025). Даатгалын салбарын 2024 оны IV улирлын санхүүгийн үйл ажиллагааны нэгдсэн тайлан.

^{XII} СЗХ-ны 2019 оны хоёрдугаар тогтоолоор баталсан “Даатгалын багц дүрэм”ийн гуравдугаар хавсралт “Даатгалын нөөц сан, албан журмын даатгалын сан болон бусад санг бүрдүүлэх, хуваарилах, түүнд хяналт тавих журам”-ын 2.3